1.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Werken met formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- formule — variabele — grootheid — eenheid
- herschrijven — uitdrukken in — haakjes uitwerken — ontbinden in factoren
- functie
- vergelijking — vergelijking oplossen — balansmethode — terugrekenen — inklemmen
- ongelijkheid — oplossing van een ongelijkheid
- stelsel van vergelijkingen — oplossingen van een stelsel van vergelijkingen

Activiteitenlijst

- soorten formules herkennen — grafieken maken bij verbanden tussen twee variabelen
- formules herschrijven — de éne variabele uitdrukken in de andere — formules combineren
- formules invoeren in de grafische rekenmachine en grafieken erbij maken
- vergelijkingen oplossen met alle bekende methoden
- ongelijkheden oplossen met behulp van grafieken
- stelsels vergelijkingen oplossen met alle bekende methoden

Achtergronden

Figuur 1

Het gebruik van formules is een betrekkelijk recente 'uitvinding'. De Franse amateurwiskundige **François Viète (1540—1603)** was de eerste die een systematische symbolische notatie voor algebraïsche problemen bedacht. Hij gebruikte letters voor onbekenden: klinkers voor variabelen en medeklinkers voor constanten (die hij als eerste coëfficiënten noemde). Zijn bijdrage aan de theorie van het oplossen van vergelijkingen is mede daardoor heel groot, want voor die tijd moesten alle oplossingsmethoden in woorden worden omschreven...

Al eerder had de theoloog **Nicole d'Oresme (1323—1382)** voor zijn natuurkundige onderzoekingen de grafiek uitgevonden. Maar pas nadat **René Descartes (1596—1650)** de beschrijving van rechte en kromme lijnen met behulp van formules bedacht, werd het gebruik van grafieken zoals wij die tegenwoordig kennen langzamerhand gemeengoed. Descartes gebruikte voor variabelen letters achterin het alfabet (vaak x, y en z) en voor constanten letters voor in het alfabet. Dat doen wiskundigen tegenwoordig nog steeds... Daarom weet je dat de formule $y = ax + b$ een (lineair) verband beschrijft tussen x en y, waarin a en b constanten zijn.

Testen

Opgave 1

Los deze vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen nauwkeurig.

a $-0{,}15(x+25)^2 + 15 = 0$

b $4 \cdot (t-2)^3 = 16$

c $\frac{8x}{x-3} = x + 3$

d $2k^2 - 2k = 180$

e $\frac{1}{x} + x = 5{,}2$

f $(2x-9)(5x+3) = (2x-4)(2x-9)$

Opgave 2

Los de vergelijking $x^2+\sqrt{2x} = 20$ op met behulp van de grafische rekenmachine. Geef een benadering in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $4 - x^2 > 3x$

b $20x(10+x)^2 \leq 80x$

Opgave 4

Los de stelsels van vergelijkingen algebraïsch op.

a $\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$

b $\begin{cases} K = 40 + 0{,}16a \\ K = 36 + 0{,}18a \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 2y^2 - x^2 = \text{-}2 \end{cases}$

d $\begin{cases} 2l - 3b = 6 \\ l \cdot b = 12 \end{cases}$

Opgave 5

Vanaf een toren wordt een vuurpijl afgeschoten. De hoogte h van de vuurpijl hangt af van de tijd t dat deze onderweg is. Er geldt: $h = 100 + 40t - 5t^2$. Hierin is h in meter en t in seconden gemeten.

a Breng de grafiek van h in beeld op de grafische rekenmachine.

b Op welke hoogte boven de begane grond werd de vuurpijl afgeschoten?

c Na hoeveel seconden was de vuurpijl weer op diezelfde hoogte?

d Na hoeveel seconden was de vuurpijl op het hoogste punt in zijn baan?

e Hoeveel meter boven de begane grond was hij op dat moment?

f Na hoeveel seconden kwam de vuurpijl op de grond terecht?

g Kun je met deze gegevens de baan van de vuurpijl in beeld brengen? Licht je antwoord toe.

Opgave 6

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem. Voor een doosje gebruikt hij 800 cm^2 karton. Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft.

a De hoogte van zo'n doosje wordt aangegeven met h en de zijde van het grondvlak met x. Laat zien dat het verband tussen h en x beschreven wordt door de formule: $4xh + 2x^2 = 800$.

b De verpakkingsmachine laat een maximale hoogte van 12 centimeter toe. Bepaal de waarde van x bij $h = 12$ cm. Geef de benadering in mm nauwkeurig.

Opgave 7

Iemand investeert € 10000,00. Het bedrag wordt voor hem belegd in twee aandelenfondsen A en B. De aandelen in fonds A leveren minder winst op, maar er lijkt weinig risico te bestaan dat ze sterk in waarde dalen. Fonds B lijkt meer winst op te gaan leveren, maar het risico is groter. Fonds A blijkt na een jaar een winst van 10% te hebben opgeleverd, voor fonds B is dit 14% winst. In totaal wordt er € 1180,00 winst aan deze investeerder uitgekeerd.

Hoeveel geld is er voor hem in fonds A belegd?

Toepassen

Opgave 8: Windmolens

Windmolens kunnen elektriciteit opwekken. Voor een zekere windmolen wordt dat aangegeven door de formule: $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en D de rotordiameter in m.

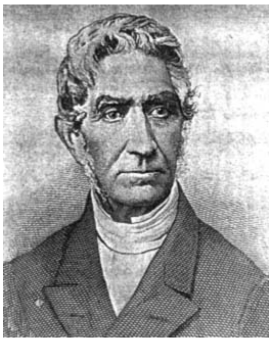
a Ga uit van een windmolen met een diameter van 24 m. Bij welke windsnelheid in km/h wordt een vermogen van 26 kW opgewekt?

b Ga weer uit van een vermogen van 26 kW. Welke diameter de windmolen moet hebben, kun je dan nog berekenen. Stel een formule op die D uitdrukt in v.

c In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Opgave 9: Body Mass Index (BMI)

De BMI is hetzelfde als de zogenaamde ‘Quetelet Index’ die is bedacht door de Belgische statisticus **Adolphe Quetelet**. De BMI is een maat voor je gezondheid. Je berekent de BMI met de formule: $BMI = \frac{G}{l^2}$. Hierin is l je lengte in meters en G je gewicht in kilogram.



Figuur 2

Voor volwassenen is er een eenvoudige interpretatie van de BMI die in deze tabel worden aangegeven.

BMI kg/m ^{2}	interpretatie
minder dan 18,5	ondergewicht
van 18,5 tot 25	normaal gewicht
van 25 tot 27	licht overgewicht
van 27 tot 30	matig overgewicht
van 30 tot 40	ernstig overgewicht
meer dan 40	ziekelijk overgewicht

Tabel 1

Voor kinderen en jongeren tot 18 jaar bestaan andere tabellen. Zoek maar eens op internet.

a In de Wikipedia vind je een rekenvoorbeeld. In mei 2014 werd berekend dat de BMI van een persoon van 90 kg en een lengte van 173 cm ongeveer 30 is. Laat zien dat dit klopt.

Van een volwassene verandert zijn lengte niet veel meer. Neem bijvoorbeeld een volwassene die een lengte heeft van 1,73 m.

b Welke formule geldt dan voor de BMI afhankelijk van zijn gewicht G?

c Bereken welk gewicht (in gehele kg) voor zo'n volwassene een gezond gewicht is.

In veel artikelen over de BMI wordt de tabel hierboven vertaald naar grafieken waarin het gewicht G afhangt van de lengte l. Er worden dan in een figuur bijvoorbeeld grafieken getekend bij $BMI = 18,5$ en $BMI = 25$. Het gebied ertussen wordt ingekleurd als 'normaal gewicht'.

d Druk G uit in l als geldt $BMI = 18,5$.

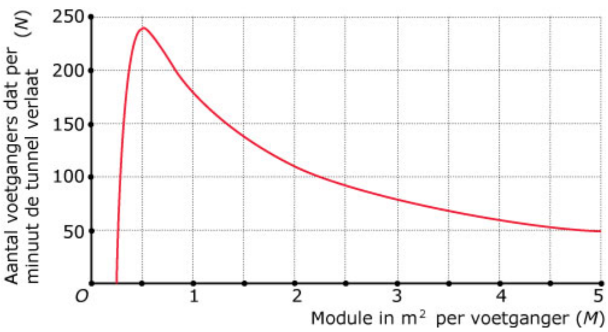
e Teken de grafieken van G als functie van l bij $BMI = 18,5$ en $BMI = 25$ en geef het gebied aan met normaal gewicht. Doe dit ook voor alle andere grenswaarden in de BMI-tabel en geef ook daarbij de tussenliggende gebieden met de juiste interpretatie aan. Neem voor l redelijke waarden.

f Wat is in de dagelijkse praktijk van voedingsdeskundigen het voordeel van dergelijke grafieken boven een formule?

Examen

Opgave 10: Drukte in voetgangerstunnels

Treinreizigers die op het station te U. uitstappen, kunnen de uitgang van het station alleen bereiken via een voetgangerstunnel. De tunnel is 30 meter lang en 3 meter breed. De snelheid van de voetgangersstroom in de tunnel is afhankelijk van de drukte. Een maat voor de drukte is de module, dat is het gemiddelde aantal vierkante meter per voetganger.



Figuur 3

a Op zeker moment bevinden zich 120 mensen in de tunnel, die allen in de richting van de uitgang lopen. Bereken voor deze situatie de module.

Het verband tussen de snelheid van de voetgangersstroom V en de module M wordt gegeven door de formule $V = 87 - \frac{26}{M+0,05}$ met V in meter per minuut en M in m^2 per voetganger.

b Bereken de module bij een snelheid van 50 m per minuut. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Wanneer een voetganger ongehinderd kan lopen, is zijn snelheid ongeveer 5 km/h. Onderzoek of dat in overeenstemming is met de formule.

Er bestaat een verband tussen de waarde van M en het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat (N). Het verband tussen M en N staat grafisch weergegeven in de figuur.

d Schat zo nauwkeurig mogelijk hoeveel mensen er per minuut de tunnel verlaten in het geval dat de snelheid van de voetgangersstroom 70 m per minuut is.

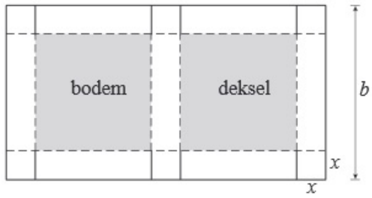
Een belangrijk gegeven bij het ontwerpen van een tunnel is het maximale aantal mensen dat in korte tijd kan worden verwerkt.

e Bij welke snelheid is het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat maximaal? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1989, tweede tijdvak)

Opgave 11: Dozen

Deze opgave gaat over dozen die op een bepaalde manier uit een rechthoekig stuk karton worden gemaakt. Denk aan een pizzadoos. Zie de figuur. Neem een stuk karton met een breedte van b cm. Wil je een doos maken die x cm hoog wordt, dan moet je voor de lengte van het stuk karton $2b - x$ cm nemen. Op zes plaatsen worden vierkantjes van x bij x cm losgesneden en omgevouwen. De stippellijnen zijn vouwlijnen; de doorgetrokken lijnen zijn snijlijnen. Bodem en deksel zijn allebei vierkant.



Figuur 4

Voor de inhoud I van zo'n doos, in cm^3, geldt de formule: $I(x) = 4x^3 - 4bx^2 + b^2x$, met $0 < x < \frac{1}{2}b$.

a Toon de juistheid van deze formule aan.

Voor elke positieve waarde van b heeft de inhoud $I(x)$ een maximale waarde.

b Bepaal de maximale inhoud voor $b = 40$ en $b = 60$ cm.

(bron: examen VWO B1 2009, eerste tijdvak, aangepast)

Email: `f.spijkers@math4all.nl`