1.6 Stelsels

Inleiding

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je op verschillende manieren oplossen. Over het oplossen van dergelijke stelsels vergelijkingen gaat dit onderdeel.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- systematisch een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen oplossen;
- gebruik maken van substitutie;
- een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen opstellen aan de hand van gegevens.

Voorkennis

- werken met variabelen (met ‘letters’);
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Noem het aantal kinderen x en het aantal volwassenen y.
Welke twee vergelijkingen krijg je? En hoe los je nu het probleem op?

Uitleg

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop.
Bereken hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Noem het aantal kinderen x en het aantal volwassenen y, dan geldt $x+y=300$. De totale inkomsten zijn $2{,}5x+4{,}5y$ en dat is samen 1110 euro: $2{,}5x+4{,}5y=1110$.

Je hebt nu twee vergelijkingen met twee onbekenden, een stelsel van vergelijkingen. Je schrijft dat zo:

$$\begin{cases} x+y = 300 \\ 2{,}5x+4{,}5y = 1110 \end{cases}$$

Door deze vergelijkingen handig te combineren kun je een stelsel van vergelijkingen oplossen, dat wil zeggen: waarden voor x en y vinden die er samen voor zorgen dat beide vergelijkingen waar zijn.

De vergelijking $x+y=300$ kun je schrijven als $y=300-x$. Vervang nu in de andere vergelijking y door $300-x$. Dat heet substitutie. Je krijgt dan: $2{,}5x+4{,}5(300-x)=1110$.

Deze vergelijking heeft alleen x als onbekende. Hij is dus op te lossen: $x=120$. Er zaten daarom 120 kinderen in de zaal.

Opgave 1

Bekijk het stelsel van vergelijkingen in de **Uitleg**.

a Herleid de vergelijking $2{,}5x + 4{,}5y = 1110$ tot de vorm $y = ...$

b Los het stelsel van vergelijkingen op door de formule die je bij a hebt gevonden in de andere vergelijking te substitueren.

c Waarom is het handiger om te werken zoals in de uitleg is gedaan?

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** de oplossingsmethode van het stelsel van vergelijkingen. Gegeven is het stelsel:

$$\begin{cases} 2x + y & = & 6 \\ x - 3y & = & -4 \end{cases}$$

a Druk in de eerste vergelijking y uit in x.

b Vul de gevonden uitdrukking voor y in de tweede vergelijking in. Welke vergelijking in x ontstaat nu?

c Los de vergelijking die je bij b hebt gevonden op.

d Bepaal bij de gevonden waarde voor x de bijbehorende waarde voor y. Schrijf je oplossing nu volledig op en controleer je antwoord.

e Je kunt dit stelsel van vergelijkingen ook oplossen door x uit te drukken in y. Los ook op die manier het stelsel op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij het oplossen van een **stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden** zoek je in feite naar de snijpunten van twee bijpassende grafieken. Die snijpunten kun je vaak vinden:

- door beide vergelijkingen met elkaar te **combineren** en er zo één vergelijking met één onbekende van te maken;
- door beide vergelijkingen zo te herschrijven dat je ze in de grafische rekenmachine kunt invoeren en dan de gevraagde snijpunten door de machine te laten berekenen.

Bij het combineren van beide vergelijkingen maak je gebruik van:

- **substitutie**: Je drukt bij één van beide vergelijkingen de ene variabele in de andere uit en je vervangt dan in de andere vergelijking die variabele door de gevonden uitdrukking;
- de **balansmethode**: Je telt dan de linkerzijden en de rechterzijden van beide vergelijkingen bij elkaar. Je zorgt er wel eerst voor dat dan één van beide variabelen wegvalt (door een slimme vermenigvuldiging toe te passen).

Voorbeeld 1

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Bereken hoeveel kinderen er in de zaal zaten.

Antwoord

Je kunt het stelsel van vergelijkingen dat hierbij hoort ook oplossen door combineren. Je schrijft:

$$\begin{cases} x + y & = & 300 \\ 2{,}5x + 4{,}5y & = & 1110 \end{cases}$$

Vermenigvuldig je de bovenste vergelijking met 2,5, dan krijg je:

$$\begin{cases} 2{,}5x + 2{,}5y & = & 750 \\ 2{,}5x + 4{,}5y & = & 1110 \end{cases}$$

Als je van de bovenste vergelijking links van het isgelijkteken de linkerzijde van de onderste vergelijking en rechts van het isgelijkteken de rechterzijde van de bovenste vergelijking aftrekt, dan krijg je: $2y = 360$.

Deze vergelijking heeft alleen y als onbekende. Hij is dus op te lossen: $y = 180$. Er zaten daarom $300 - 180 = 120$ kinderen in de zaal.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je een stelsel van vergelijkingen kunt oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken).

a Voer zelf de in het voorbeeld beschreven oplossingsmethode uit.

b Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door de bovenste vergelijking aan beide zijden met 4,5 te vermenigvuldigen. Laat zien hoe dan de oplossing verloopt.

c Je had dit stelsel ook kunnen oplossen door de bovenste vergelijking aan beide zijden met 5 te vermenigvuldigen en de onderste vergelijking aan beide zijden met -2. Laat zien hoe dan de oplossing verloopt.

Opgave 4

Los de stelsels vergelijkingen op de manier van **Voorbeeld 1** op.

a $$\begin{cases} 2x + y &= 6 \\ x - 3y &= -4 \end{cases}$$

b $$\begin{cases} 5x - 4y &= 8 \\ 2x - 2y &= 3 \end{cases}$$

Voorbeeld 2

Je kunt een stelsel ook oplossen met de grafische rekenmachine.

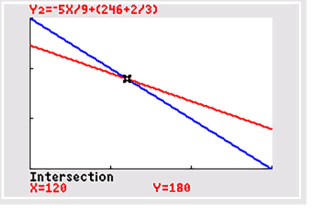
Los bijvoorbeeld dit stelsel zo op:

$$\begin{cases} x + y &= 300 \\ 2{,}5x + 4{,}5y &= 1110 \end{cases}$$

Antwoord

De vergelijking $x + y = 300$ kun je schrijven als $y = 300 - x$. En de vergelijking $2{,}5x + 4{,}5y = 1110$ kun je schrijven als $y = -\frac{5}{9}x + 246\frac{2}{3}$.

Voer je beide vergelijkingen in de grafische rekenmachine in, dan kun je de grafieken bekijken. Zowel x als y kunnen waarden aannemen vanaf 0 t/m 300, dus de vensterinstellingen liggen voor de hand. Met de grafische rekenmachine kun je het snijpunt in de tabel vinden: $x = 120$ en $y = 180$.



Figuur 2

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je een stelsel van vergelijkingen kunt oplossen met de grafische rekenmachine. Los het stelsel van vergelijkingen op die manier op.

$$\begin{cases} 2x + y &= 6 \\ x - 3y &= -4 \end{cases}$$

Opgave 6

Los de stelsels van vergelijkingen op met de grafische rekenmachine. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $\begin{cases} 12x + 5y = -14 \\ 24x + 7y = 44 \end{cases}$

b $\begin{cases} 0{,}56x - 2y = 0{,}82 \\ -0{,}33x + 3y = 9{,}12 \end{cases}$

Voorbeeld 3

Welke afmetingen heeft een rechthoekig grasveld met een oppervlakte van 120 m^2 en een omtrek van 46 meter?

Antwoord

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b. Een oppervlakte van 120 m^2 betekent $l \cdot b = 120$. Een omtrek van 46 meter betekent $2l + 2b = 46$.

Dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden is alleen algebraïsch op te lossen door middel van substitutie. Schrijf $2l + 2b = 46$ als $l = 23 - b$ en vervang in de andere vergelijking l door deze uitdrukking. Je krijgt:
$(23 - b) \cdot b = 120$.

De vergelijking $(23 - b) \cdot b = 120$ schrijf je als $b^2 - 23b + 120 = 0$. Door ontbinden in factoren vind je $b = 8 \vee b = 15$.

Het grasveld is 15 bij 8 meter.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Waarom kun je dit stelsel van vergelijkingen niet oplossen door bij beide vergelijkingen de linkerzijden en de rechterzijden op te tellen (of af te trekken)?

b Laat zien hoe je dit stelsel kunt oplossen met behulp van de grafische rekenmachine.

Opgave 8

Gegeven is het stelsel van vergelijkingen:

$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$

a Probeer dit stelsel van vergelijkingen op te lossen.

b Welk probleem doet zich voor?

c Leg uit waarom dit stelsel van vergelijkingen geen oplossingen heeft.

Verwerken

Opgave 9

Los het stelsel van vergelijkingen op.

$\begin{cases} 6x + 3y = 20 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Opgave 10

Los de stelsels van vergelijkingen op.

a $\begin{cases} x+y & = & 6 \\ 2x-3y & = & 0 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x+4y & = & 7 \\ 3x+5y & = & 8 \end{cases}$

c $\begin{cases} y & = & x^2 \\ x+y & = & 6 \end{cases}$

d $\begin{cases} x \cdot y & = & 84 \\ 2x+y & = & 29 \end{cases}$

e $\begin{cases} x^2+y^2 & = & 50 \\ y-2x & = & 5 \end{cases}$

Opgave 11

Van een rechthoek is de oppervlakte 300 cm^2 en de omtrek 80 cm. Noem de lengte l en de breedte b, beide in centimeter.

Stel twee vergelijkingen op waaraan l en b moeten voldoen. Bereken de oplossing van dit stelsel.

Opgave 12

Op een kaasboerderij wordt van 9,8 kilogram melk 1 kilogram volvette kaas gemaakt. 22,5 kilogram melk verwerken ze daar tot 1 kilogram boter. Er is 1000 kilogram melk in voorraad. Er wordt altijd twee keer zo veel boter als kaas gemaakt.

Hoeveel kilogram kaas en hoeveel kilogram boter kan er van de beschikbare hoeveelheid melk worden gemaakt? Los dit probleem op met behulp van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Opgave 13

Voor een heg koopt iemand jonge groenblijvende planten: 20 thuja's en 12 jeneverbessen. Dat kost hem € 267,00. Na het planten blijven er twee jeneverbessen over, maar zijn er vijf thuja's te kort. Bij het tuincentrum ruilen ze de twee jeneverbessen voor vijf thuja's, maar er moet € 18,00 worden bijbetaald.

Wat kost een thuja en wat kost een jeneverbes?

Toepassen

Opgave 14: Drie vergelijkingen met drie onbekenden

Los het stelsel van drie vergelijkingen op.

$$\begin{cases} 3x+3y+z & = & 4 \\ 2x-y+z & = & 24 \\ -x+3y+2z & = & -47 \end{cases}$$

Opgave 15: Een restaurant beginnen

Een beginnend restaurant koopt tafelgerei in: borden, kommen, en bestek. De uiteindelijke bestelling voldoet aan een paar criteria.
Borden koop je in sets van vijf, en een set kost € 7,50. Kommen zijn te koop in sets van vier, voor € 4,80 per set. Bestek kost € 6,00. Afzonderlijke borden en kommen zijn 0,4 kg per stuk, en een bestekset weegt 2 kg.
De manager wil dat er twee keer zoveel borden als kommen ingekocht worden. De eindbestelling weegt 500 kg, en het totale kostenplaatje is € 1560,00.

a Stel een stelsel van drie vergelijkingen op die aan het bovenstaande voldoet, en waarmee je kan uitrekenen hoeveel borden, kommen en bestek er besteld zijn.

b Los het stelsel van vergelijkingen op. Hoeveel sets borden, kommen en bestek zijn er besteld?

Testen

Opgave 16

Los de stelsels van vergelijkingen op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $\begin{cases} 3a + 4b = 10 \\ a - 2b = 4 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$

c $\begin{cases} p \cdot q = 400 \\ q = 200 - 0 \quad 5p \end{cases}$

d $\begin{cases} -3x^2 + y^2 = -27 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Opgave 17

In een klein theater zijn twee soorten plaatsen: ‘zaal’ en ‘balkon’. Voor een bepaalde voorstelling kost een zaalplaats € 12,50 en een balkonplaats € 15,00. Er worden die avond 82 kaarten verkocht met een totale opbrengst van € 1080,00.

Hoeveel mensen hadden een balkonplaats?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van stelsels vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.