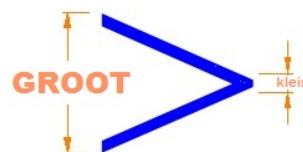


1.5 Ongelijkheden

Inleiding

Als je wilt weten bij welke windsnelheid een windmolen meer dan bijvoorbeeld 20 kW aan vermogen levert, dan moet je een ongelijkheid oplossen. Hetzelfde geldt als je wilt weten vanaf hoeveel gereden kilometer per jaar een auto op benzine duurder is dan één op diesel. Over het oplossen van ongelijkheden gaat dit onderdeel.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- ongelijkheden systematisch algebraïsch oplossen.
- ongelijkheden oplossen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- grafieken maken met de grafische rekenmachine bij formules die het verband tussen twee variabelen beschrijven;
- vergelijkingen systematisch oplossen, zowel algebraïsch als met de grafische rekenmachine.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert, hangt af van de wielkengte (dat is de halve diameter van de rotor) en van de windsnelheid v .

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en 0,052 een getal dat afhangt van het type molen.

- Stel, je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Welke ongelijkheid hoort daar bij?
- Hoe ga je zo'n ongelijkheid oplossen?



Figuur 2

Uitleg

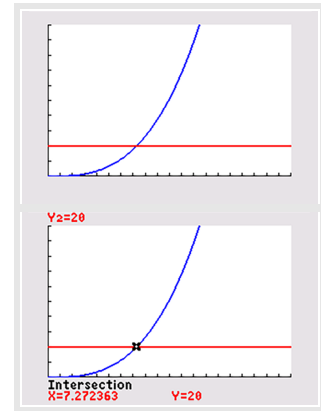
Je ziet op veel plaatsen windmolens om elektriciteit op te wekken. Het vermogen dat zo'n molen levert hangt af van de wielkengte en van de windsnelheid v .

Het vermogen van een zeker type windmolen wordt gegeven door de formule: $P = 0,052v^3$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en de diameter van de cirkel die de uiterste punt van een wiek maakt bij het draaien is 20 meter. Stel je wilt weten vanaf welke windsnelheid het vermogen van de windmolen meer dan 20 kW bedraagt. Daarbij hoort de ongelijkheid $0,052v^3 > 20$.

Het oplossen van deze ongelijkheid gaat prima met de grafische rekenmachine:

- Je voert $Y1=0.052X^3$ en $Y2=20$ in en brengt ze goed in beeld.
- Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: $(7,27; 20)$. De grafische rekenmachine heeft er een speciale routine voor, bekijk de figuren.
- Je leest de oplossing van de ongelijkheid uit de figuur af: $v > 7,27$.

Belangrijk is nog het aantal decimalen waarop je moet afronden. Het gegeven antwoord is op twee decimalen nauwkeurig juist. Moet je echter op één decimaal nauwkeurig afronden, dan is het antwoord: $v > 7,3$. Je weet dan dat je antwoord ergens boven de 7,25 ligt.



Figuur 3

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de ongelijkheid $0,052v^3 > 20$ wordt opgelost. Daarbij wordt de grafische rekenmachine gebruikt.

Bij een algebraïsche aanpak bereken je eerst de oplossingen van de vergelijking $0,052v^3 = 20$ met behulp van terugrekenen.

- Laat zien dat je dan dezelfde oplossing vindt.
- Wat is het voordeel van een algebraïsche aanpak?

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $y_1 = 0,01x(x^2 - 400)$ en $y_2 = x$. Je wilt $y_1 < y_2$ oplossen.

- Hoe moet je het venster van de grafische rekenmachine instellen om goede grafieken bij deze ongelijkheid te krijgen?
- Hoe vaak snijden de grafieken elkaar?
- Los nu de ongelijkheid met de grafische rekenmachine op in twee decimalen nauwkeurig.

Om zeker te weten dat je alle snijpunten van de grafieken hebt gevonden, kun je de bijbehorende vergelijking beter algebraïsch oplossen. Wil je een ongelijkheid algebraïsch oplossen, dan los je de bijbehorende vergelijking algebraïsch op en lees je daarna de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af.

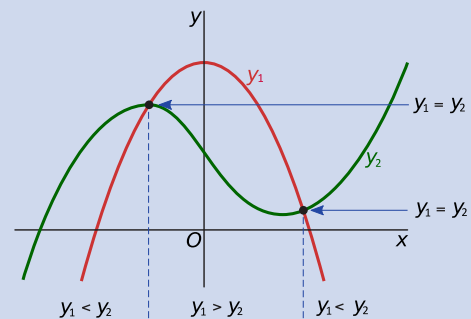
- Los de bij deze ongelijkheid horende vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een uitdrukking zoals $y_1 < y_2$ of $y_1 > y_2$, heet een **ongelijkheid** als zowel y_1 als y_2 functies zijn van dezelfde variabele, bijvoorbeeld x . Ongelijkheden los je op met behulp van grafieken.

- Eerst voer je beide functies in de grafische rekenmachine in.
- Vervolgens breng je ze goed in beeld. Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn!
- Dan bepaal je de snijpunten. Dat kan met de grafische rekenmachine, zie het. Dat kan vaak ook door de vergelijking $y_1 = y_2$ **algebraïsch** op te lossen. Soms is dit veel handiger, of wordt het zo gevraagd.
- Vervolgens lees je de oplossing van de ongelijkheid uit de grafieken af. Let daarbij goed op de gewenste nauwkeurigheid!



Figuur 4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Los op: $60 - x^2 \geq 4x$.

Antwoord

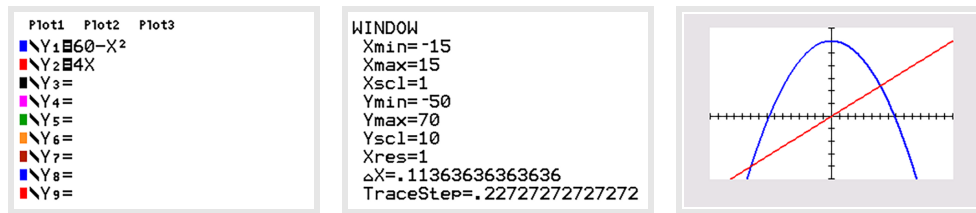
Je bekijkt eerst de grafieken van $y_1 = 60 - x^2$ en $y_2 = 4x$. Bij de meeste waarden van x zijn de functiewaarden verschillend. Alleen bij de snijpunten zijn de functiewaarden gelijk.

De coördinaten van de snijpunten vind je door op te lossen: $60 - x^2 = 4x$.

Je vindt: $x = -10 \vee x = 6$.

Ga ook na hoe je dit met je grafische rekenmachine doet.

Lees nu uit de figuur af dat de oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x \leq 6$.



Figuur 5

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je een ongelijkheid systematisch oplost.

Je gaat nu zelf de ongelijkheid $60 - x^2 < 4x$ algebraïsch oplossen.

- Los de vergelijking $60 - x^2 = 4x$ algebraïsch op.
- Schrijf de juiste oplossing van de ongelijkheid op. Hij bestaat uit twee delen.

Opgave 4

Je wilt de ongelijkheid $x^2(10 - x) > 2x^2$ oplossen.

- Met welke vensterinstellingen krijg je de grafieken van $y_1 = x^2(10 - x)$ en $y_2 = 2x^2$ goed in beeld? (Alle snijpunten moeten zichtbaar zijn.)
- Los de ongelijkheid op met behulp van de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 2

Een verhandelaar heeft een mengmachine van € 2000,00. De inkooprijs van de verf en de kosten van het mengproces komt samen op € 5,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 7,25 per liter. Hij maakt winst als de opbrengst TO groter is dan de totale kosten TK . Met voorraadkosten wordt geen rekening gehouden. Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst gaat maken.

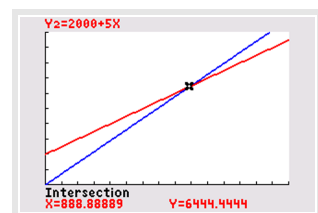
Antwoord

Er geldt: $TK = 2000 + 5q$ en $TO = 7,25q$. In de formule is q de verkochte hoeveelheid liter verf.

Er moet gelden: $TO > TK$, dus $7,25q > 2000 + 5q$. Met de grafische rekenmachine breng je de grafieken van TO en TK goed in beeld. Het snijpunt moet zichtbaar zijn.

Vervolgens bereken je dit snijpunt algebraïsch: $7,25q = 2000 + 5q$ geeft $2,25q = 2000$ en dus $q \approx 888,9$ liter.

In de grafiek lees je af dat de handelaar winst maakt als $q \geq 889$. Dus als hij 889 liter verf of meer verkoopt maakt hij winst.



Figuur 6

Opgave 5

Een concurrent van de verfhandelaar uit het voorbeeld koopt een mengmachine van € 3000,00. De inkoopprijs en de kosten van het mengproces samen is € 4,00 per liter. Hij verkoopt zijn verf voor € 8,25 per liter.

Bereken algebraïsch vanaf hoeveel liter verkochte verf hij winst maakt.

Opgave 6

Stel je voor dat je al jaren in een auto op benzine rijdt. De benzineprijs blijft echter maar stijgen en je vraagt je af of je niet beter een gastank kunt laten inbouwen en op gas kunt gaan rijden. Nu zijn je kosten per kilometer ongeveer 12,5 eurocent aan benzine.

- Stel een formule op voor de benzinekosten per jaar (B in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers (a).
- Een gastank kost (inclusief inbouwen) € 1250,00. Je kosten per kilometer gaan omlaag, want gas kost 80 eurocent per liter en je rijdt 10 kilometer op 1 liter gas. Je wilt de gastank in één jaar terugverdienen. Stel een formule op voor de kosten in het eerste jaar dat je op gas rijdt (G) afhankelijk van het aantal kilometer (a).
- Je wilt weten hoeveel kilometer je in dat jaar moet rijden om de gastank er weer uit te hebben. Welke ongelijkheid hoort daar bij?
- Los deze ongelijkheid algebraïsch op met a in kilometer nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 7

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- $x^3 > x$
- $x^3 \leq 80x - 2x^2$
- $\frac{8}{x^2} \geq x$
- $x^2 - 4x > -3$

Opgave 8

Gegeven is de functie $y = 100x^2(x - 20)^2$.

- Los op (in twee decimalen nauwkeurig): $y < 100000$.
- Los algebraïsch op: $y \leq 100x^2$.

Opgave 9

Een winkelier koopt maandelijks fietsen in voor € 300,00 per stuk. Deze slaat hij op in een magazijn. Voor het gebruiken van dit magazijn betaalt hij een huur van € 950,00 per maand. Daarnaast heeft hij personele kosten van € 5200,00 per maand. Hij verkoopt de fietsen voor € 425,00 per stuk.

- Hoeveel fietsen moet de winkelier in een maand verkopen wil hij die maand winst maken? Ga ervan uit dat hij alle fietsen die hij inkoop dezelfde maand nog verkoopt.
- In een maand heeft de winkelier 200 fietsen gekocht. Hoeveel van die fietsen moet hij minstens verkopen om alle kosten van die maand te dekken?

Opgave 10

Twee auto's rijden op de A1, beide met een (ongeveer) constante snelheid. Bestuurder A houdt een snelheid van 110 km/h aan. Bestuurder B rijdt met 120 km/h. Als bestuurder B bij de IJsselbrug bij Deventer komt ligt hij 24 kilometer achter op bestuurder A. Het tijdstip waarop dat gebeurt is $t = 0$. De afstand (in kilometer) tot Deventer wordt voorgesteld door a .

- Stel bij beide auto's een functie voor a als functie van t op.

- b Bereken na hoeveel minuten auto A door B wordt ingehaald.
- c Bereken algebraïsch hoelang hun onderlinge afstand minder dan 4 kilometer is.

Opgave 11

Los de ongelijkheden zo mogelijk algebraïsch op. Geef benaderde antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

- a $\sqrt{p} \geq -p + 6$
- b $x\sqrt{x} > x(4x - 1)$
- c $3(m - 1)(m^2 - 4) \leq m^2 - 3m - 2$
- d $(4a - 4)\frac{1}{a} < 2\left(a - \frac{1}{a}\right)$

Toepassen

Opgave 12: Smart ForTwo

Je rijdt al een Smart Fortwo voor € 4,00 per dag! Stel je hebt op 1 januari 2015 een Smart gekocht en betaalt hiervoor € 4,00 per dag. Daarnaast heb je onderhoudskosten: voor 2,5 eurocent per gereden kilometer kun je daarvoor een abonnement afsluiten waar vrijwel alle onderhoudskosten mee worden afgedekt. Je hebt dan dus alleen nog benzinekosten. Je kunt met 1 liter benzine 20 kilometer rijden en 1 liter benzine kost ongeveer € 1,60.



Figuur 7

- a Hoeveel eurocent per kilometer ben je kwijt aan benzine en onderhoud samen?
- b Hoeveel kost deze Smart je per jaar als je er 16000 kilometer per jaar mee rijdt?
- c Stel een ongelijkheid op bij de vraag: Hoeveel kilometer per jaar mag je maximaal met deze Smart rijden als je minder dan € 5000,00 kwijt wilt zijn dat jaar? Los daarna die ongelijkheid algebraïsch op.
- d Eigenlijk geldt het onderhoudsabonnement van 2,5 eurocent per gereden kilometer pas vanaf 20000 km/jaar. Rijd je minder, dan betaal je alsof je 20000 km/jaar rijdt. Stel de formule op voor de jaarlijkse kosten K als functie van het aantal gereden kilometers.

Opgave 13: Deterministisch modelleren

Deterministisch modelleren is een tak van wiskunde die onder andere veel gebruikt wordt in de transport. Een voorbeeld hiervan is het zogenaamde 'knapzakprobleem'. Stel, Frits wil backpacken in de Vogezen. Hij wil zoveel mogelijk eten en drinken meenemen, maar hij kan niet meer dan 10 kg aan voedselvoorraden dragen. Ieder blik eten weegt 1,5 kg en iedere fles drinken weegt 0,5 kg. Hij wil minstens vijf flessen drinken meenemen, en minstens vier blikken eten. Het knapzakprobleem luidt hier: hoe kan Frits zijn tas optimaal inpakken?

- a Stel de ongelijkheden op die dit knapzakprobleem beschrijven.
- b Schrijf de ongelijkheden om naar vergelijkingen en teken deze als grafieken. Bepaal aan de hand van deze tekening op hoeveel manieren de voedselvoorraad van Frits samengesteld kan worden.
- c Frits pakt het liefst zijn tas zo vol mogelijk in. Om minder dan 10 kg aan voorraden mee te nemen is zonde. Hoe kun je op de tekening makkelijk aflezen wat de samenstelling(en) zijn, gegeven het feit dat Frits zijn tas zo vol mogelijk inpakt? Geef deze samenstelling(en).

Testen

Opgave 14

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

- a** $12 - 2x < 2x^2$
b $\frac{1}{x} \geq 0,25x$


Opgave 15

De afstand Utrecht — Enschede is voor een fietser 144 kilometer. Fietser A gaat met 18 km/h van Utrecht naar Enschede. Fietser B gaat met 24 km/h van Enschede naar Utrecht. Beide fietsers starten tegelijkertijd. Hoelang is fietser A dichterbij Utrecht, dan fietser B. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het oplossen van ongelijkheden**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
