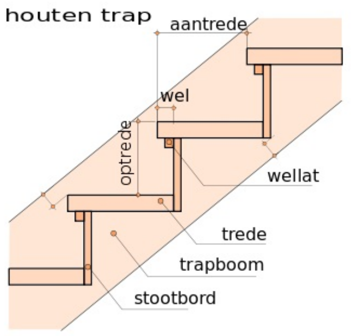
# 1.4 Vergelijkingen

## Inleiding

Een architect wil een goede trap ontwerpen. Hij gebruikt daarvoor de formule: $2 \cdot \textit{optrede} + \textit{aantrede} = \textit{paslengte}$. Hij gaat uit van een paslengte van 70 cm. Voor de optrede wil hij 16 cm nemen. Vult hij deze gegevens in de formule in, dan krijgt hij de vergelijking:
$32 + \textit{aantrede} = 70$.
Hij kan dus als aantrede nemen: $\textit{aantrede} = 70 - 32 = 38$ cm.
Op deze manier heeft hij de vergelijking opgelost. Het getal 38 maakt de vergelijking kloppend: $32 + 38 = 70$.




**Figuur 1**

### Je leert in dit onderwerp

- systematisch vergelijkingen met één variabele oplossen met al bekende oplossingsmethoden;
- vergelijkingen oplossen met de grafische rekenmachine.

### Voorkennis

- werken met variabelen (met 'letters');
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

## Verkennen

### Opgave V1

Je hebt in voorgaande jaren al vergelijkingen opgelost.

**a** Zet je kennis op een rijtje: welke soorten vergelijkingen ken je en welke oplossingsmethoden ken je?

Een zuiver rechthoekig doosje met een vierkante bodem en een hoogte van 12 cm heeft een buiten-oppervlakte (inclusief bodem en deksel) van 512 cm$^2$.

**b** Welke afmetingen heeft dat doosje? Beantwoord deze vraag met behulp van een vergelijking.

## Uitleg

De formule $\frac{1}{2}(x+8) = -7 + x$ is een voorbeeld van een vergelijking. Bij deze vergelijking kun je een getal voor $x$ zoeken dat de vergelijking waar maakt: aan beide zijden van het isgelijkteken komt er hetzelfde uit. Dat kun je doen met de balansmethode.

Je kunt bijvoorbeeld zo te werk gaan:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(x+8) &= -7 + x && \text{linker zijde haakjes wegwerken} \\ \tfrac{1}{2}x + 4 &= -7 + x && \text{beide zijden } -4 \\ \tfrac{1}{2}x &= -11 + x && \text{beide zijden } -x \\ -\tfrac{1}{2}x &= -11 && \text{beide zijden } \times -2 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

Je kunt dit antwoord nog controleren door aan beide zijden van de gegeven vergelijking voor $x$ het getal 22 in te vullen.

### Opgave 1

Los de vergelijkingen op met de balansmethode. Rond indien nodig af op twee decimalen.

**a** $3t - 400 = 700 - 2t$

**b** $2300 - 0{,}15 \cdot p = 1600 + 0{,}42 \cdot p$

**c** $\frac{x-3}{4} = \frac{1}{5}(10 - 2x)$

**d** $2 - 5(2x - 4) = -7 + 8(2 + x)$

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Formules zoals $y = 2x + 3$ of $a + 4b - c = 15$ of $6x + 10 = 2x - 8$ noem je **vergelijkingen**. Je kunt dan waarden (of combinaties van waarden) zoeken die de vergelijking kloppend maken, het **oplossen van een vergelijking**.

Vergelijkingen kun je systematisch oplossen door herleiden. Vooral bij vergelijkingen met één variabele doe je dat vaak. Je gebruikt dan algebraïsche methoden, zoals:

- de **balansmethode**, waarbij je aan beide zijden van het isgelijkteken
  - hetzelfde optelt of aftrekt;
  - met hetzelfde vermenigvuldigt of door hetzelfde deelt (maar niet delen door of vermenigvuldigen met 0).
- de **terugrekenmethode**, waarbij je bewerkingen ongedaan maakt door het tegenovergestelde te doen:
  - optellen maak je ongedaan door aftrekken (en omgekeerd);
  - vermenigvuldigen maak je ongedaan door delen (en omgekeerd);
  - machten maak je ongedaan door worteltrekken (en omgekeerd).
- **ontbinden in factoren**, waarbij je gebruik maakt van het feit dat een vergelijking van de vorm $a \cdot b = 0$ gelijkwaardig is met $a = 0 \vee b = 0$.

Als algebraïsche methoden niet werken, kun je nog denken aan **inklemmen**: je zoekt de oplossing door verschillende waarden te proberen op een steeds kleiner zoekgebied. De grafische rekenmachine heeft daar diverse routines voor ingebouwd, zie het **Practicum**.

Als er staat bereken **algebraïsch** of 'los algebraïsch op', dan moet je de opdracht stap voor stap met behulp van algebra oplossen. Inklemmen is dan bijvoorbeeld niet toegestaan.

Als er staat bereken **exact** of 'los exact op', dan moet je de opdracht ook stap voor stap oplossen en mag je niet afronden.

### Voorbeeld 1

In de vergelijking $2(x - 4)^2 = 32$ komt de onbekende $x$ maar op één plek voor. Je kunt hem oplossen met terugrekenen.

Antwoord

Je zoekt eerst uit hoe je heen rekent vanuit $x$:

$$x \longrightarrow \boxed{-4} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \boxed{(\ldots)^2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \boxed{\times 2} \longrightarrow 32$$

**Figuur 2**

Vervolgens ga je terugrekenen:

$$x \longleftarrow \boxed{+\ 4} \longleftarrow \ldots \longleftarrow \boxed{\pm\sqrt{\ldots}} \longleftarrow \ldots \longleftarrow \boxed{/\,2} \longleftarrow 32$$

**Figuur 3**

Je vindt: $x = \pm\sqrt{\frac{32}{2}} + 4$ en dus $x = 0 \vee x = 8$.

Controleer door in te vullen.

## Opgave 2

Los de vergelijkingen op door terugrekenen.

**a** $5t - 20 = 100$

**b** $(3 \cdot t - 20)^2 = 1600$

**c** $3 \cdot p^3 = 81$

**d** $2\sqrt{2x - 4} = 12$

**e** $3 \cdot \sqrt{0{,}5x - 4} - 2 = \text{-}3$

## Voorbeeld 2

Los de vergelijkingen algebraïsch op:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $x^3 = 4x$

Antwoord

De eerste vergelijking kun je met de productsommethode oplossen. Je zoekt twee getallen waarvan het product +6 is en de som -5. In de tabel zie je dat de getallen -2 en -3 voldoen.

| +6 | | |
|---|---|---|
| 1 | 6 | |
| 2 | 3 | |
| -2 | -3 | ← -5 |
| -1 | -6 | |

**Figuur 4**

De eerste vergelijking wordt dan:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \\ x - 2 &= 0 \vee x - 3 = 0 \\ x &= 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

De tweede vergelijking:

$$\begin{aligned} x^3 &= 4x \\ x^3 - 4x &= 0 \\ x\left(x^2 - 4\right) &= 0 \\ x &= 0 \vee x^2 - 4 = 0 \\ x &= 0 \vee x^2 = 4 \\ x &= 0 \vee x = \text{-}2 \vee x = 2 \end{aligned}$$

## Opgave 3

Los de vergelijkingen op door ontbinden in factoren.

**a** $0{,}5x^2 = 4x$

**b** $k^2 + 5k - 6 = 0$

**c** $8p - p^2 = 0$

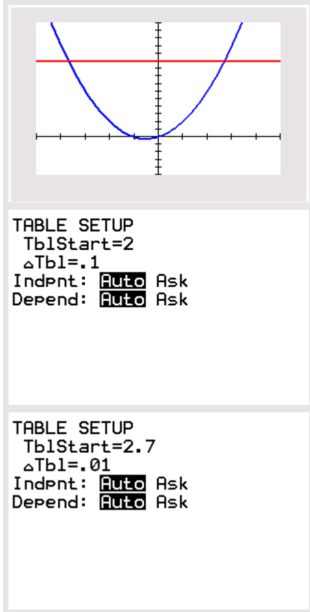
**d** $x(x - 2) = 3x - 6$

**e** $x^2 = x + 12$

**f** $\frac{1}{2}x^3 = 2x$

## Voorbeeld 3

Niet alle vergelijkingen kun je met de balansmethode, door terugrekenen of ontbinden in factoren systematisch oplossen. De oplossing vinden door inklemmen werkt daarentegen altijd wel. Je moet dan van tevoren een idee hebben van het gebied waarin de oplossing is te vinden.
De vergelijking $x + x^2 = 10$ kun je bijvoorbeeld oplossen met inklemmen.



Figuur 5

Antwoord

Eerst maak je de grafieken van Y1=X+X^2 en Y2=10 op de grafische rekenmachine. Breng ze zo in beeld dat alle snijpunten zichtbaar zijn. De grafieken snijden elkaar tweemaal. De vergelijking heeft twee oplossingen.

Voor de positieve oplossing moet je zoeken tussen 2 en 3.

Stel de tabel in op stappen (voor $x$) van 0,1. Je ziet dat je verder moet zoeken tussen 2,7 en 2,8. Het zoekgebied wordt kleiner, je klemt de oplossing in. Stel vervolgens een stapgrootte van 0,01 in en zoek tussen 2,70 en 2,80. Nu zie je dat de oplossing tussen 2,70 en 2,71 ligt, het dichtst bij 2,70. Zo vind je op twee decimalen nauwkeurig: $x \approx 2{,}70$. Als een nauwkeuriger oplossing wordt verlangd, moet je nog verder zoeken tussen 2,700 en 2,710.

Op dezelfde manier bepaal je de andere oplossing. Op twee decimalen nauwkeurig is de volledige oplossing: $x \approx 2{,}70 \vee x \approx -3{,}70$.

Bekijk ook hoe je deze oplossingen door je grafische rekenmachine kunt laten berekenen. Zie het **Practicum**.

## Opgave 4

Los de vergelijkingen op met de inklemmethode. Geef je oplossingen in drie decimalen nauwkeurig.

**a** $x^3 = 4 - x$

**b** $\frac{600}{a} = 18 + 0{,}04a$

## Opgave 5

Los de vergelijkingen op met de grafische rekenmachine. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

**a** $x^3 + 2x = 16$

**b** $x + \sqrt{x} = 10$

**c** $l + \frac{10}{l} = 10$

**d** $\frac{300}{p+4} = 20$

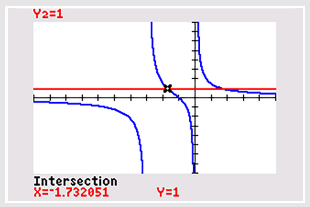
## Voorbeeld 4

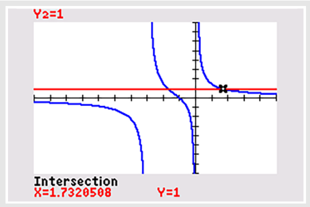
Los de vergelijking $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} = 1$ zowel algebraïsch als met de grafische rekenmachine op.

Antwoord

De oplossing met de grafische rekenmachine is betrekkelijk eenvoudig:

- Voer in: Y1=1/X+2/(X+3) en Y2=1.
- Bekijk de grafieken.
- Je kunt de twee $x$-waarden waar Y1 en Y2 gelijk zijn met de grafische rekenmachine vinden, maar exacte waarden krijg je niet.






**Figuur 6**

Voor de algebraïsche oplossing tel je bijvoorbeeld eerst de breuken bij elkaar op:

$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} = \frac{x+3}{x(x+3)} + \frac{2x}{x(x+3)} = \frac{3x+3}{x(x+3)}$

De vergelijking wordt: $\frac{3x+3}{x(x+3)} = 1$ en dus: $3x + 3 = x(x + 3)$.

Let op dat zowel $x \neq 0$ als $x + 3 \neq 0$ moet zijn!

Dit geeft: $x^2 = 3$ en dus $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$.

Je ziet hoe nuttig algebraïsche methoden zijn: je vindt meteen de exacte oplossingen, terwijl je je anders moet behelpen met benaderingen, die vaak nog lastig te vinden zijn ook.

### Opgave 6

Los de vergelijkingen zowel algebraïsch als met de grafische rekenmachine op.

**a** $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

**b** $\frac{20}{p^2+5} = 2$

**c** $\frac{10}{2x} + 1 = \frac{x}{x+1}$

**d** $\frac{5x}{x^2+2x} - \frac{6}{x} = \frac{1}{x+2}$

## Verwerken

### Opgave 7

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

**a** $2x - 3(x + 4) = 5x - 18$

**b** $\sqrt{x + 4} = 20$

**c** $(2x - 5)^3 = 125$

**d** $\sqrt{a^2 + 4} - 20 = 0$

**e** $2x^2 - 2 = 12x + 30$

**f** $(-x + 2)(2x + 3) = (3 - 4x)(2x + 3)$

### Opgave 8

Los de vergelijkingen op door inklemmen met behulp van de grafische rekenmachine. Zoek alle oplossingen.

**a** $\sqrt{x} = 6 - x$

**b** $x^4 = 2 + x$

### Opgave 9

Bereken bij de formules de waarde van de ene variabele als de andere 0 is.

**a** $2p - 3q = 650$

**b** $W = \text{-}0{,}25q(0{,}5q - 100)$

**c** $k^2 + (l + 2)^2 = 100$

**d** $a = \frac{1200}{600+0{,}2d^2} - 1$

**e** $(x^2 - 4)(y^2 - 9) = \text{-}36$

**f** $y^4 + 1 = \frac{4}{1+x^2}$

### Opgave 10

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

**a** $\frac{12}{x+10} = 400$

**b** $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{3} = \text{-}\frac{7}{3}$

**c** $\frac{2a}{a-1} - \frac{3}{a} = 2$

**d** $\frac{2x^2-4x+2}{x^4+1} = 0$

**e** $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x+2}{2x+2}$

### Opgave 11

Los de vergelijking $\frac{2}{\sqrt{5x^2-3}} = \frac{1}{x}$ exact op.

### Opgave 12

Stel je voor dat iemand van het Empire State Building een steentje laat vallen. Hij staat 381 m boven de grond. Onder invloed van de zwaartekracht valt een steen eenparig versneld (de luchtweerstand laat je buiten beschouwing). Natuurkundigen hebben daarvoor een rekenmodel bedacht. Daarin hangen de afgelegde weg $s$ (in meter) en de snelheid $v$ (in meter per seconde) af van de tijd $t$ (in seconden) volgens de formules $s = 4{,}9t^2$ en $v = 9{,}8t$.

**a** Geef een formule voor de hoogte $h$ van het steentje boven de grond als functie van $t$.

**b** Bereken het tijdstip waarop het steentje op de grond komt op een decimaal nauwkeurig.

**c** Bereken de snelheid waarmee het steentje op de grond komt. Geef je antwoord in km/h.

## Toepassen

### Opgave 13: Probleem met boswal

Een boer wordt door de gemeente gevraagd om een stuk land te voorzien van een boswal van 4 meter breed. Het stuk land is zuiver vierkant. Het grenst aan één kant al aan het bos, zodat er maar aan drie kanten een strook af hoeft voor de boswal. ‘Ik houd zo maar de helft van mijn land over,’ verzucht de boer. Als dat waar is, hoe groot is dan de oppervlakte van het land dat de boer overhoudt?

Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

### Opgave 14: Kaarsen maken

Sommige kaarsen zijn bijna zuiver cilindervormig. Stel je voor dat je een kaars wilt maken met een lengte van 20 cm. Je neemt een lont met een diameter van 3 mm en dompelt die een aantal keren in een bad met vloeibaar kaarsvet. Bij elke onderdompeling wordt de diameter van de kaars 1 mm groter. De hoeveelheid kaarsvet $V$ (in $\text{mm}^3$) in de kaars hangt af van het aantal onderdompelingen $a$.

**a** Geef een formule voor $V$ als functie van $a$.

**b** Breng de grafiek van deze functie met de grafische rekenmachine in beeld.

**c** Na hoeveel onderdompelingen is de hoeveelheid kaarsvet in de kaars ongeveer 106 $\text{cm}^3$? Lees je antwoord eerst uit de grafiek af en bereken het daarna door de bijbehorende vergelijking algebraïsch op te lossen.

## Testen

### Opgave 15

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

**a** $1{,}25t + 5{,}50 = 1{,}85t$

**b** $0{,}15(p-2)^2 = 1{,}35$

**c** $12 - \sqrt{4 + x^2} = 0$

**d** $\frac{3x-12}{x^2+1} = 0$

**e** $\frac{1}{x-4} + \frac{x}{5} = -\frac{2}{5}$

### Opgave 16

Los op met behulp van de grafische rekenmachine in twee decimalen nauwkeurig: $0{,}25x^4 = 5 - x$.

## Practicum

Bekijk in de volgende practica hoe je **vergelijkingen kunt oplossen met je grafische rekenmachine**.

- **Basistechnieken TI84**
- **Basistechnieken TInspire**
- **Basistechnieken Casio fx-CG50**
- **Basistechnieken HPprime**
- **Basistechnieken NumWorks**

Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode, terugrekenen, of ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

**Werk met AlgebraKIT.**