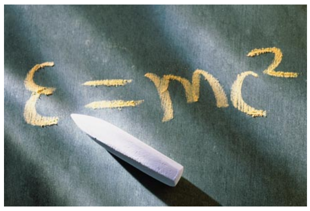
1.2 Formules herschrijven

Inleiding

Formules kun je vaak op verschillende manieren schrijven. Zo kun je de omtrek van een rechthoek uitleggen als ‘Tel lengte en breedte en lengte en breedte bij elkaar op’, maar ook als ‘Neem 2 keer de lengte en 2 keer de breedte en tel dat bij elkaar op’. Dan zeg je verschillende dingen, maar die leveren toch altijd dezelfde omtrek op. Het zijn gelijkwaardige formules (in woorden). Soms is de éne versie van de formule handiger, soms werk je liever met een andere...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- formules herleiden;
- haakjes uitwerken;
- ontbinden in factoren;
- werken met breuken.

Voorkennis

- werken met variabelen (met ‘letters’);
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

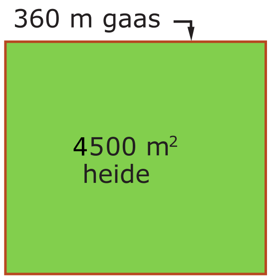
Iemand wil een stuk hei afgrenzen om er schapen te laten grazen met 360 meter gaas. Het af te grenzen stuk moet rechthoekig worden met een oppervlakte van 0,45 hectare (dus 4500 m^2). De vraag is nu of dat kan en zo ja, wat dan de lengte en de breedte zijn van het af te zetten stuk hei.

Noem de lengte van de rechthoek l en de breedte b.

a Stel bij dit probleem een formule op die past bij de gegeven omtrek en één die past bij de gegeven oppervlakte.

b Schrijf beide formules in de vorm $l = ...$

c Hoe kun je nu het probleem verder oplossen?



Figuur 2

Uitleg

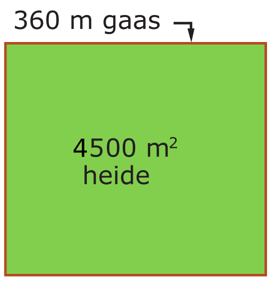
Als een rechthoek met lengte l en breedte b een omtrek heeft van 360 m, dan geldt de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$.
Die formule kun je schrijven als $2l + 2b = 360$ en dan verder herleiden:

$$\begin{aligned} 2l + 2b &= 360 \\ l + b &= 180 \\ l &= 180 - b \end{aligned}$$

beide zijden /2

beide zijden - b

Nu heb je l uitgedrukt in b. Zoiets doe je om grafieken te maken, l komt op de verticale as.



Figuur 3

Als deze rechthoek een oppervlakte van 4500 m^2 moet hebben, geldt ook $l \cdot b = 4500$.
En dit kun je herleiden:

$$\begin{aligned} l \cdot b &= 4500 \\ l &= \frac{4500}{b} \end{aligned}$$

beide zijden /b

Wil je nu weten voor welke b de rechthoek aan beide eisen voldoet, dan kun je met twee grafieken werken. Maar je kunt ook een vergelijking maken en die oplossen:

$$\begin{aligned} \frac{4500}{b} &= 180 - b && \text{beide zijden met } b \text{ vermenigvuldigen} \\ 4500 &= 180b - b^2 && \text{op 0 herleiden} \\ b^2 - 180b + 4500 &= 0 && \text{ontbinden in factoren} \\ (b-30)(b-150) &= 0 && \text{oplossingen opschrijven} \\ b &= 30 \vee b = 150 \end{aligned}$$

Je vindt dus twee mogelijke waarden voor de breedte van deze rechthoek.

Opgave 1

Je ziet in de **Uitleg** dat je de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$ eenvoudiger kunt schrijven als $l + b = 180$. Schrijf de volgende formules zo eenvoudig mogelijk.

a $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - 6 \cdot y = 12$

b $2 \cdot x \cdot y + x \cdot y = 18$

c $y = 4x^2 + x + 3y - 7x + 2x^2$

d $2xy + xy - 3x = 18$

Opgave 2

Je ziet in de **Uitleg** dat je de formule $2 \cdot l + 2 \cdot b = 360$ kunt schrijven in de vorm $l = 180 - b$. Herleid de volgende formules zodat y is uitgedrukt in x.

a $2x - 4y = 10$

b $-3x + 5 = 10 - 2y$

c $5x + 10xy = 20$

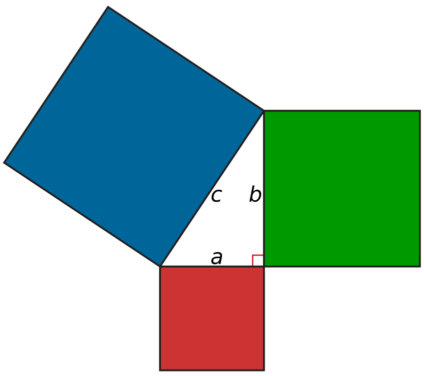
d $x \cdot (y + 2) = 6$

Opgave 3

In een rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras.
In formulevorm: $a^2 + b^2 = c^2$.

a Geef twee gelijkwaardige formules.

b Neem $a = 3x$ en $b = 4x$ en druk c uit in x.
Neem aan dat $x > 0$.



Figuur 4

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Uitdrukkingen kun je **herleiden** (of **herschrijven**) met rekenregels. Zo is de uitdrukking $l+l+b+b$ te herleiden tot $2l+2b$.
Als je in beide uitdrukkingen dezelfde waarden voor de variabelen b en l invult, geven ze een gelijke waarde als uitkomst. De uitdrukkingen zijn dus **gelijkwaardig**.

Formules kunnen ook gelijkwaardig zijn.
Zo zijn $2l+2b=60$ en $b=30-l$ gelijkwaardig, want als je dezelfde waarden voor b respectievelijk l invult, zijn beide formules tegelijk 'waar' of 'niet waar'. En daarom zijn dit **gelijkwaardige formules**.

Formules blijven gelijkwaardig als je de gewone rekenregels toepast, zoals haakjes wegwerken, ontbinden in factoren en rekenen met breuken. Ook mag je:

- aan beide zijden van een isgelijkteken hetzelfde optellen of aftrekken;
- aan beide zijden van een isgelijkteken met hetzelfde vermenigvuldigen of delen behalve vermenigvuldigen of delen met 0);
- de uitdrukkingen aan beide zijden van het isgelijkteken verwisselen.

Hier zie je nog een keer de rekenregels voor werken met haakjes en breuken:

- **haakjes wegwerken** (ook wel 'haakjes uitwerken'):
  $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$
  $(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
- **ontbinden in factoren**:
  $a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x+y)$
  $x^2 + p \cdot x + q = (x+a) \cdot (x+b)$ met $a+b=p$ en $a \cdot b = q$ (de productsommethode)
- **breuken optellen/aftrekken**:
  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$
- **breuken vermenigvuldigen** (ga ervan uit dat er nergens door 0 wordt gedeeld):
  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- **breuken delen**:
  $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \Big/ \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ of $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Voorbeeld 1

Voorbeelden van haakjes wegwerken zijn:

- $\text{-}2 \cdot (x-y) = \text{-}2 \cdot x - \text{-}2 \cdot y = \text{-}2x + 2y$
- $x \cdot (3-x) = x \cdot 3 - x \cdot x = 3x - x^2$
- $2 - (x-5) = 2 - x - \text{-}5 = 2 - x + 5 = 7 - x$
- $(x+3)(x-5) = (x+3)(x+\text{-}5) = x \cdot x + x \cdot \text{-}5 + 3 \cdot x + 3 \cdot \text{-}5 = x^2 - 2x - 15$
- $(p-5)^2 = (p-5)(p-5) = p^2 - 5p - 5p + 25 = p^2 - 10p + 25$
- $x(2x+1)(2x-1) = x\left(4x^2 - 2x + 2x - 1\right) = x\left(4x^2-1\right) = 4x^3 - x$

Let er wel op dat het wegwerken van haakjes geen blind automatisme wordt. Soms kun je met een formule juist veel eenvoudiger werken als je de haakjes gewoon laat staan. Als je bijvoorbeeld wilt weten voor welke p de uitdrukking $(p-5)^2$ gelijk is aan 0, dan zie je nu meteen dat dat geldt voor $p=5$. Bij de uitdrukking $p^2 - 10p + 25$ zie je dat een stuk minder snel. Denk ook steeds na of het wegwerken wel is toegestaan.

- Goed: $\frac{x+6}{2} = \frac{x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2}x + 3$
- Fout: $\frac{6}{x+2} = \frac{6}{x} + \frac{6}{2} = \frac{6}{x} + 3$

Bij de eerste breuk moet je zowel x als 6 door 2 delen.
Met een getalvoorbeeld kun je zien dat de tweede breuk niet goed is weggewerkt. Kies je bijvoorbeeld $x = 1$, dan zou de uitkomst $\frac{6}{1+2} = 2$ moeten zijn en niet $\frac{6}{1} + 3 = 9$.

Opgave 4

Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg.

a $3x \cdot (x - 2y)$

b $2a - (9a + 6)$

c $0{,}5p \cdot 100p - p \cdot (20p + 100)$

d $-5p^3\left(p^2 - 3p^3\right)$

e $\frac{2(x+2)+6}{2}$

f $\frac{3(x+2)+6}{x+2}$

Opgave 5

Werk in de uitdrukkingen de haakjes weg.

a $(x + 2) \cdot (x + 4)$

b $2(b + 4)(b - 2)$

c $(l + 3)\left(\frac{1}{l} + 6\right)$

d $(5c - 4)^2$

Voorbeeld 2

Voorbeelden van ontbinden in factoren zijn:

- $2x^2 + 6xy = 2x \cdot x + 2x \cdot 3y = 2x(x + 3y)$
- $-x^2 + 4x = -x \cdot x - -x \cdot 4 = -x(x - 4)$
- $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 2 \cdot 3 = (x + 2)(x + 3)$
- $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$ (Zie figuur.)
- $x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x - 2)(x + 2)$
- $x^4 + 7x^2 + 12 = \left(x^2 + 3\right)\left(x^2 + 4\right)$

-12		
1	-12	
2	-6	← -4
3	-4	
-3	4	
-2	6	
-1	12	

Figuur 5

Opgave 6

Ontbind in factoren.

a $2x^2 + 10x$

b $3x^2 - 9x$

c $x^2 + 5x + 4$

d $b^2 - 9b + 8$

e $2k^2 - 34k + 32$

Opgave 7

Ontbind in factoren.

a $c^3 + 2c^2 + c$

b $p^3 - p^5$

c $2x^4 + 8x^{10}$

d $3y^4 - 6y^5 + 2y^2$

e $x^4 + x^2 - 12$

Voorbeeld 3

Als breuken gelijknamig zijn mag je ze bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.

$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{7}{9}$

$\frac{5}{a}-\frac{2}{a}=\frac{3}{a}$

Als je breuken met verschillende noemers wilt optellen of aftrekken, moet je ze eerst gelijknamig maken.

$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{10}{15}+\frac{9}{15}=\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}$

$\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=\frac{4y}{xy}+\frac{3x}{xy}=\frac{3x+4y}{xy}$

Breuken vereenvoudig je door teller en noemer door hetzelfde te delen.

Hier zie je nog een paar voorbeelden (ga ervan uit dat je nooit door 0 deelt):

- $\frac{2}{a}-\frac{5}{b}=\frac{2b}{ab}-\frac{5a}{ab}=\frac{2b-5a}{ab}$
- $\frac{2}{3a}+\frac{5}{a^2}=\frac{2a}{3a^2}+\frac{15}{3a^2}=\frac{2a+15}{3a^2}$
- $\frac{2}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{2(x+3)}{x(x+3)}-\frac{x}{x(x+3)}=\frac{x+6}{x(x+3)}$

Opgave 8

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{a}+\frac{1}{a}$

b $\frac{2}{a}-\frac{1}{b}$

c $\frac{4a}{3}+\frac{-3}{5a^2}$

Opgave 9

Schrijf als één breuk.

a $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}$

b $\frac{2x}{x^2-x}+\frac{1}{x+1}$

c $\frac{5}{x^2-1}-\frac{14}{2x+2}$

d $\frac{5x+25}{x^2+3x-4}-\frac{5}{x^2+3x-4}$

Voorbeeld 4

Bij breuken vermenigvuldigen en delen gelden de regels:

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

$\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}\Big/\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ of $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Bij delen door een breuk kun je de bovenstaande tussenstappen overslaan. Je mag dus in één keer zeggen: $\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Hier zie je een paar voorbeelden (ga ervan uit dat je nooit door 0 deelt).

- $\frac{2}{a} \cdot \frac{5}{a} = \frac{10}{a^2}$
- $\frac{2}{a} \Big/ \frac{5}{a} = \frac{2}{5}$
- $\frac{2}{a} \Big/ \frac{5}{b} = \frac{2b}{ab} \Big/ \frac{5a}{ab} = \frac{2b}{5a}$ of $\frac{2}{a} \Big/ \frac{5}{b} = \frac{2}{a} \cdot \frac{b}{5} = \frac{2b}{5a}$
- $\frac{2a}{3} \cdot \frac{5}{a^2} = \frac{10a}{3a^2} = \frac{10}{3a}$
- $\frac{2a}{3} \Big/ \frac{5}{a^2} = \frac{2a^3}{3a^2} \Big/ \frac{15}{3a^2} = \frac{2a^3}{15} = \frac{2}{15}a^3$ of $\frac{2a}{3} \Big/ \frac{5}{a^2} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a^2}{5} = \frac{2a^3}{15} = \frac{2}{15}a^3$
- $\frac{4}{x^2+7x+12} \Big/ \frac{2}{x+4} = \frac{4(x+4)}{2(x^2+7x+12)} = \frac{2(x+4)}{(x+3)(x+4)} = \frac{2}{x+3}$, mits $x \neq -3$

Opgave 10

Schrijf als één breuk.

a $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{9}$

b $\frac{2}{7} \Big/ \frac{1}{3}$

c $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{b}$

d $\frac{2}{a} \Big/ \frac{6}{b}$

Opgave 11

Schrijf als één breuk.

a $\frac{3x}{y^2} \cdot \frac{5y}{2x} - \frac{6}{y}$

b $\frac{2}{x} \cdot \frac{2x}{3} - \frac{1}{2x}$

c $\frac{3}{5x} \Big/ \left(\frac{2x}{5} - \frac{3}{x}\right)$

d $\frac{5}{x^2+4x+4} \Big/ \frac{4}{x+2} + \frac{2x}{x-2}$

Verwerken

Opgave 12

Herleid.

a $4 \cdot x + 10 = 3 \cdot x - 2 \cdot y$

b $2 \cdot y + 2 \cdot x \cdot x + 4 \cdot x = 6 \cdot x^2$

c $4 \cdot x \cdot h + 2 \cdot x^2 = 100$

d $W = p \cdot (650 - 2 \cdot p) - 20 \cdot (650 - 2 \cdot p)$

Opgave 13

Druk in de formules y uit in x. Schrijf ze daarna zo eenvoudig mogelijk.

a $0{,}5x + 1{,}5y = 12$

b $(x + y)^3 = 8$

c $x^2 - y^2 = 25$

d $2x^2 + 4xy = 100$

Opgave 14

Werk de haakjes weg.

a $-2x(x^2+6x)$

b $-2x-(x^2+6x)$

c $(t+20)(t-5)$

d $(x^2+1)(3x-2)$

e $(a-3)(a+3)$

f $(6x-3)^2$

g $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

h $(x-2)^3$

Opgave 15

Ontbind in factoren.

a x^2-4x

b $-2t^2+18t$

c x^2+5x-6

d $12-4p-p^2$

e $4k^2-16$

f $2p^3-2p^2-24p$

g $16-p^2$

h $x^2-10x+9$

Opgave 16

Schrijf als één breuk.

a $\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{y}+\frac{5}{x}$

b $\frac{3}{x-2}-\frac{2x}{x^2-4}$

c $\frac{2}{x}\Big/\frac{3}{y}+\frac{5}{x}$

d $2x-\frac{1}{2x}$

e $\frac{12}{-x^2}\Big/-\frac{16}{x}$

f $\frac{6}{x^2+x-12}\Big/\frac{3}{x+4}$

Toepassen

Opgave 17: Een boswal aanleggen

Een boer heeft een rechthoekig stuk land dat twee keer zo lang is als breed. Uit het oogpunt van landschapsbeheer haalt hij aan beide lange zijden een strook van 3 meter breed af en maakt daar een smalle boswal. Verder maakt hij een bredere boswal van 10 meter breed aan één van beide korte zijden. Zijn land wordt daarmee 2690 m^2 kleiner.

a Maak eerst een tekening van de situatie. Noem de oorspronkelijke breedte van het land x (in meter). Hoe groot is de oppervlakte van dit land, uitgedrukt in x?

b Hoe groot is de oppervlakte van het land na de aanleg van de boswal? Geef deze oppervlakte als formule met haakjes.

c Bereken door wegwerken van de haakjes hoe groot de breedte van het rechthoekige stuk land is.

Opgave 18: Windmolens

Windmolens kunnen elektriciteit opwekken. Voor een zekere windmolen wordt dat aangegeven door de formule: $P = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot D^2$. Hierin is P het (gemiddelde) vermogen in kW (kiloWatt), v de (gemiddelde) windsnelheid in m/s en D de rotordiameter in meter.

a Ga uit van een windmolen met een diameter van 24 meter. Bij welke windsnelheid in km/h wordt een vermogen van 26 kW opgewekt?

b Ga weer uit van een vermogen van 26 kW. Welke diameter de windmolen moet hebben, kun je dan berekenen als je de snelheid van de wind weet. Stel een formule op die D uitdrukt in v.

c In een bepaald gebied ligt de windsnelheid tussen de 7,2 en de 36 km/h. Als je een (gemiddeld) vermogen van 26 kW met een windmolen wilt kunnen opwekken, tussen welke waarden kies je dan de diameter van die molen?

Testen

Opgave 19

Schrijf deze formules zo, dat y is uitgedrukt in x.

a $x \cdot x + 4 \cdot y = 8 \cdot x^2 - 4 \cdot x$

b $2x \cdot y = 0{,}4x + 200$

c $x - 4y^2 = 2$

Opgave 20

Werk eerst de haakjes uit en ontbind daarna in factoren.

a $2(x-2)(x+3) - 12$

b $(x+3)(x-2) + 4x - 8$

Opgave 21

Goed of fout? Verbeter de foute uitwerkingen of ontbindingen. Laat bij de goede uitwerkingen zien waarom ze goed zijn.

a $(x+3)^2 = x^2 + 9$

b $-x^2 - 4x + 12 = -(x-6)(x+2)$

c $\frac{8x+100}{4x^2} = \frac{2}{x} + \frac{25}{x^2}$

d $\frac{8x}{x^2+3x} = \frac{5x}{x^2} = \frac{5}{x}$, mits $x \neq 0$.

Opgave 22

Schrijf als één breuk:

a $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

b $\frac{3}{4x} \Big/ \frac{5}{2x} - \frac{x}{x+1}$

c $\frac{2}{x+3} - \frac{4}{x+5}$

d $\frac{x+1}{x^2+x} + \frac{1}{2x}$

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met variabelen en het ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.