

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **keuzeonderwerp: Lineair programmeren**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

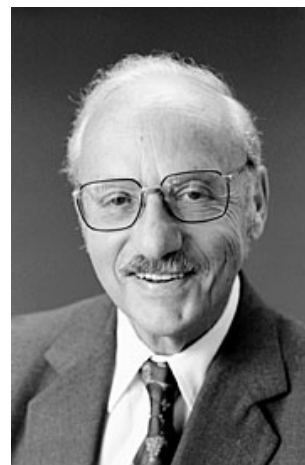
- stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden — lineaire ongelijkheid — grenslijn
- functie van twee variabelen — randvoorwaarden, toegestane gebied — niveaulijnen
- beslissingsprobleem met twee variabelen — doelfunctie, randvoorwaarden, keuzeonderwerp: Lineair programmeren
- functie van meerdere variabelen

Activiteitenlijst

- een stelsel vergelijkingen oplossen — het toegestane gebied tekenen bij een stelsel lineaire ongelijkheden
- bij een functie van twee variabelen het toegestane gebied (het domein) tekenen — niveaulijnen tekenen
- een lineair programmeringsprobleem oplossen — de randenwandelmethode gebruiken
- een lineair programmeringsprobleem oplossen met de Oplosser in Excel

Achtergronden

In 1947 ontwikkelde George Dantzig (8 november 1914 - 13 mei 2005) de simplexmethode, een techniek om lineaire programmeringsproblemen met meerdere variabelen op te lossen.



Figuur 1 George Dantzig

Testen

Opgave 1

Je wilt het maximum berekenen van de doelfunctie $W = 3x + 4y - 10$ onder de randvoorwaarden:

- $x \geq 30$
- $0 \leq y \leq 40$
- $x + 2y \leq 120$
- $3x + y \leq 240$

- Teken het toegestane gebied in een x, y -assenstelsel.
- Teken de niveaulijnen $W = 250$ en $W = 300$.
- Bereken het maximum van W op het toegestane gebied.

Opgave 2

De firma Zoetlief produceert onder andere Zzmaks. Dit zijn repen die bestaan uit een vulling van 20 gram biscuit en 10 gram karamel, omhuld met 20 gram chocolade. De productiekosten bestaan uit verwerkingskosten (inclusief verpakking, transport en dergelijke) en grondstofkosten. De verwerkingskosten bedragen € 0,75 per reep. In de tabel zijn de kosten per 100 gram van iedere grondstof weergegeven.

grondstof	kosten per 100 gram
chocolade	€ 1,50
biscuit	€ 1,00
karamel	€ 1,00

Tabel 1

Zzmaks worden verkocht voor € 1,50 per stuk.

Per week worden 60000 Zzmaks verkocht.

- a Bereken de totale winst die Zoetlief per week op Zzmaks maakt.

De directie van Zoetlief laat onderzoek doen naar de gevolgen van een eventuele wijziging van de samenstelling van de Zzmaks. Wegens de verkoop via automaten moet rekening gehouden worden met de volgende voorwaarden:

- Het totale gewicht per reep moet 50 gram blijven.
- De verkoopprijs per reep moet € 1,50 blijven.
- In verband met de stevigheid mag een reep niet minder dan 5 gram biscuit en niet meer dan 13 gram karamel bevatten.
- Om breken te voorkomen moet het omhulsel uit ten minste 14 gram chocolade bestaan.

Uit het onderzoek blijkt dat er meer Zzmaks verkocht zullen worden naarmate er meer chocolade en minder biscuit in zit.

Men vindt het volgende verband: $q = 20000 + 4000x - 2000y$

Hierbij is q het per week verkochte aantal Zzmaks, x het aantal gram chocolade en y het aantal gram biscuit per Zmak. De verwerkingskosten blijven bij elke samenstelling € 0,75 per reep.

De te verwachten totale winst in euro per week op Zzmaks is W .

- b Toon aan dat geldt: $W = (100 + 20x - 10y)(50 - x)$
- c Stel de beperkende randvoorwaarden voor x en y op.
- d Teken het toegestane gebied met daarin de twee niveaulijnen $W = 5000$ en $W = 10000$.

Opgave 3

Een fabrikant van auto's produceert drie verschillende uitvoeringen van de 'Libra', een typische gezinsauto. Hij maakt die drie uitvoeringen in twee van zijn fabrieken. De dagelijkse productie in auto's per dag is weergegeven in de tabel.

	Libra GT	Libra GS	Libra Eco
fabriek I	10	30	50
fabriek II	20	20	20

Tabel 2

Het komende halfjaar heeft de fabrikant bestellingen voor 800 auto's van het type 'Libra GT', 1600 auto's van het type 'Libra GS' en 2000 auto's van het type 'Libra Eco'. De productiekosten zijn € 20000 per fabriek per dag.

De fabrikant wil berekenen hoeveel dagen hij elke fabriek aan deze bestelling moet laten werken om de kosten zo laag mogelijk te houden.

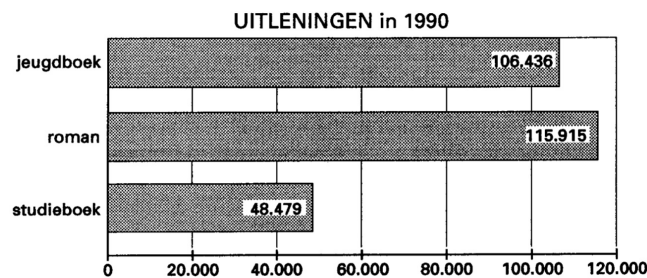
Ga ervan uit dat als een fabriek een dag draait, dat dan ook het precieze aantal auto's wordt gefabriceerd dat de tabel geeft. Er worden bijvoorbeeld altijd 50 Libra Eco's gemaakt als fabriek I een dag draait.

- Stel bij dit probleem de bijbehorende randvoorwaarden op en beschrijf de doelfunctie.
- Teken het toegestane gebied en enkele niveaulijnen van de doelfunctie.
- Los het probleem van de fabrikant op.

Opgave 4

Een gemeentebibliotheek koopt elk jaar nieuwe boeken. Hiervoor is in 2012 een bedrag van € 105000 beschikbaar.

In een vergadering van de hoofden van de drie afdelingen (jeugdboeken, romans en studieboeken) moet afgesproken worden hoe het bedrag over deze afdelingen zal worden verdeeld. Mevrouw De Rooy, hoofd van de afdeling romans, stelt voor het bedrag van € 105000 te verdelen volgens de verhouding van de uitleencijfers in 2010. Deze uitleencijfers zijn weergegeven in het staafdiagram.



Figuur 2

Mevrouw Jansen, hoofd van de afdeling jeugdboeken, stelt voor om in totaal zo veel mogelijk nieuwe boeken aan te schaffen. Wel moet aan een aantal eisen voldaan zijn. Zij noemt:

- de afdeling jeugdboeken en de afdeling romans moeten elk minstens 1200 boeken kunnen aanschaffen;
- de afdeling studieboeken moet minstens 400 boeken kunnen aanschaffen;
- de afdeling jeugdboeken krijgt niet meer geld dan de afdeling romans;
- de afdeling jeugdboeken krijgt niet meer dan drie keer het bedrag van de afdeling studieboeken.

Bij het doorrekenen van haar voorstel gaat men van de volgende gemiddelde prijzen uit: € 15 voor een jeugdboek, € 24 voor een roman en € 30 voor een studieboek.

- Bereken de bedragen die de afdelingen krijgen toegewezen als het voorstel van mevrouw De Rooy wordt uitgevoerd. Rond af op hele euro's.
- Doe hetzelfde in geval dat het voorstel van mevrouw Jansen wordt uitgevoerd.
Mevrouw Smit vindt de vierde voorwaarde van mevrouw Jansen niet redelijk, immers studieboeken zijn veel duurder dan jeugdboeken. Zij stelt voor het getal 3 in die voorwaarde te vervangen door 2.
- Bereken opnieuw de bedragen die in dat geval naar elk van de afdelingen gaan.

(naar: examen vwo wiskunde A in 1991, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 5: Eigen onderzoek: supermarkt

In een supermarktketen heeft men vaak te maken met problemen die met behulp van lineair programmeren zijn op te lossen. Denk maar eens aan het invoeren van nieuwe merken. Stel je voor dat product van merk A niet zo goed loopt kan worden vervangen door eenzelfde product van merk B. De directie weet nog niet zeker of merk B beter zal verkopen, dus houdt de supermarkt ook nog merk A op de schappen. Een beperkte ruimte en een beperkt budget worden beschikbaar gesteld voor merk B. Het gaat natuurlijk weer om een zo groot mogelijke winst.

Onderzoek nu hoe je hierbij een probleem kunt formuleren dat met behulp van lineair programmeren is op te lossen.

Opgave 6: Stoelen sjouwen

Voor een voorlichtingsavond zijn er 140 extra stoelen naar de aula en 70 extra stoelen naar de bibliotheek gebracht. Die stoelen komen uit lokalen op de eerste, de tweede en de derde verdieping. De aula is op de begane grond, de bibliotheek op de eerste verdieping. Er moeten 60 stoelen naar de derde verdieping, 60 stoelen naar de tweede verdieping en 90 stoelen naar de eerste verdieping.

In de tabel kun je zien hoeveel tijd het gemiddeld kost om een stoel van de ene naar de andere plaats te dragen. De tijd is in minuten.

	naar 1ste	naar 2de	naar 3de
aula	2	4	6
bieb	2	3	5

Tabel 3

Verzin een methode om deze klus in zo min mogelijk tijd op te knappen. Hoeveel stoelen moeten er dan van de aula naar elke verdieping? En vanuit de bibliotheek?

Examen

Opgave 7: Tapijtenfabriek

Tapijtenfabriek KTF heeft een bestelling ontvangen van 100 rollen tapijt 'licht', 150 rollen 'middel' en 50 rollen 'zwaar'. De verkoopprijzen per rol zijn achtereenvolgens vastgesteld op € 4000, € 5000 en € 7000 per rol. Voor de fabricage worden drie soorten kunstvezels gebruikt; de handelsnamen hiervan zijn Ray, Pol en Vin. De klossen kunstvezels worden betrokken van het bedrijf Artif. In de tabel is weergegeven hoeveel klossen per rol tapijt nodig zijn.

	licht	middel	zwaar
Ray	2	3	5
Pol	4	3	7
Vin	1	1	2

Tabel 4

- Toon aan dat KTF voor de bestelling in totaal 2450 klossen nodig heeft.
- Artif levert deze klossen voor een totaalbedrag van € 850000. Bereken het verschil van de opbrengst en de kosten aan kunstvezels die de bestelling voor KTF met zich meebrengt.

Bij Artif worden de kunstvezels gemaakt uit aardoliedestillaten A, B en C, die ingekocht moeten worden bij de petrochemische industrie.

- De verwerking van 3 ton destillaat A levert 6 klossen Ray, 12 klossen Pol en 2 klossen Vin; er blijft een residu over van 1000 kilogram.
- De verwerking van 3 ton destillaat B levert 12 klossen Ray, 12 klossen Pol en 7 klossen Vin; er blijft een residu over van 200 kilogram.
- De verwerking van 3 ton destillaat C levert 12 klossen Ray, 6 klossen Pol en 4 klossen Vin; er blijft een residu over van 700 kilogram.

Noem het aantal ton destillaat A, destillaat B en destillaat C dat Artif moet inkopen om de order van KTF te kunnen uitvoeren respectievelijk a , b en c . Behalve aan $a, b, c \geq 0$ moeten a , b en c aan nog drie voorwaarden voldoen.

- Stel deze voorwaarden op.

Om tegemoet te komen aan de wensen van de ondernemingsraad schrijft de directie van Artif voor dat de verwerking van destillaat C niet meer mag plaatsvinden in verband met gevaren die hieraan verbonden zijn. De klossen die KTF heeft besteld, zullen uitsluitend door verwerking van a ton destillaat A en b ton destillaat B geproduceerd moeten worden. In dat geval gelden de volgende voorwaarden:

- $a, b \geq 0$
- $a + 2b \geq 450$
- $a + b \geq 300$
- $2a + 7b \geq 1050$

Het hoofd van de verkoopafdeling van Artif voert onderhandelingen met twee leveranciers Petrol en Destil. Petrol is bereid destillaat te leveren voor € 1500 per ton en destillaat B voor € 2100 per ton.

- d** Bereken hoeveel Artif minimaal kwijt is aan inkoopkosten bij Petrol om de order van KTF te kunnen uitvoeren, in het geval Artif uitsluitend bij Petrol inkoop. Doe dit zowel met behulp van niveaulijnen (in het toegestane gebied) als met behulp van de Excel Oplosser.

Leverancier Destil, die met een grote voorraad destillaat B zit, wil aan Artif uitsluitend destillaat B leveren, maar wel tegen een zo aantrekkelijke prijs, dat de minimale inkoopkosten voor Artif bij Destil even hoog zijn als bij Petrol, in het geval Artif uitsluitend bij één van de twee leveranciers inkoop.

- e** Bereken welke prijs Destil vraagt voor één ton destillaat B.

De inkoopkosten zijn voor Artif bij de twee leveranciers gelijk. Het hoofd van de inkoopafdeling plaatst de bestelling bij die leverancier waarbij hij een zo groot mogelijk overschot aan kunstvezels krijgt en zo weinig mogelijk residu.

- f** Bij welke leverancier plaatst hij de bestelling? Licht je antwoord toe.

(naar: examen vwo wiskunde A in 1989, tweede tijdvak)



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
