1.3 Beslissingsproblemen

Inleiding

Een rijwielhandelaar verkoopt naast gewone fietsen steeds vaker e-bikes, fietsen met elektrische ondersteuning. Hij moet dus beide soorten in voorraad hebben. De aanschafkosten zijn verschillend voor deze soorten fietsen, maar de winst die hij erop maakt ook. Hoe kan hij door zijn voorraad slim in te delen zoveel mogelijk winst maken?

Figuur 1

Dit is een 'lineair programmeringsprobleem'. Je leert in dit onderdeel hoe je die kunt vertalen naar het werken met een (lineaire) functie van twee variabelen.

Je leert in dit onderwerp

- lineaire beslissingsproblemen met twee variabelen vertalen naar een functie van twee variabelen en bijpassende randvoorwaarden;
- een lineair programmeringsprobleem oplossen met behulp van niveaulijnen;
- een lineair programmeringsprobleem oplossen met behulp van 'randen wandelen';

Voorkennis

- het begrip functie van meerdere variabelen en de bijbehorende randvoorwaarden;
- een voorstelling maken van de waarden van een functie van twee variabelen met behulp van niveaulijnen.

Verkennen

Opgave V1

Een rijwielhandelaar krijgt van de fabrikant een aanbod van elk gewenst aantal fietsen en e-bikes tegen een inkoopprijs van € 500,00 per fiets en € 900,00 per e-bike. Dat aanbod lijkt hem wel wat, maar meer dan 50 fietsen van die fabrikant wil hij niet aanschaffen, het aantal e-bikes heeft geen beperkingen. Hij heeft voor dit aanbod maximaal € 95000,00 ter beschikking. Verder heeft hij maximaal 60 m^2 opslagruimte voor deze bestelling, waarbij hij voor een fiets en een e-bike 0,5 m^2 per stuk rekent.
Per fiets kan hij € 200,00 winst maken en per e-bike € 300,00.

Hoeveel winst kan hij maximaal maken op dit aanbod?

Uitleg

Een rijwielhandelaar krijgt van een fabrikant een aanbod van fietsen en e-bikes tegen een inkoopprijs van € 500,00 per fiets en € 900,00 per e-bike. Dat aanbod lijkt hem wel wat, maar meer dan 50 fietsen van die fabrikant wil hij niet aanschaffen. Het aantal e-bikes heeft geen beperkingen. Hij heeft voor dit aanbod maximaal € 95000,00 ter beschikking. Verder heeft hij maximaal 60 m^2 opslagruimte voor deze bestelling, waarbij hij voor een fiets en een e-bike 0,5 m^2 per stuk rekent.
Per fiets kan hij € 200,00 winst maken en per e-bike € 300,00.

Figuur 2

Hoeveel winst kan deze rijwielhandelaar maximaal op dit aanbod maken? En hoeveel fietsen en e-bikes moet hij dan kopen?

Om dit probleem op te lossen, voer je variabelen in: x voor het aantal aan te schaffen fietsen en y voor het aantal aan te schaffen e-bikes.

De winst W is dan een functie van twee variabelen: $W = 200x + 300y$
Deze functie is de ‘doelfunctie’ voor de oplossing van dit probleem.

Er zijn ook randvoorwaarden:

- $0 \leq x \leq 50$ en $y \geq 0$
- $500x + 900y \leq 95000$
- $0{,}5x + 0{,}5y \leq 60$

Teken nu eerst het toegestane gebied met punten (x,y) die aan de randvoorwaarden voldoen. Teken vervolgens enkele niveaulijnen van de winstfunctie W of onderzoek de hoekpunten van het toegestane gebied. Beantwoord ten slotte de gestelde vragen.

Deze manier van werken om een beslissingsprobleem op te lossen heet ‘lineair programmeren’.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

a Licht toe hoe je aan de randvoorwaarden voor x en y komt.

b Teken het toegestane gebied en twee niveaulijnen van de winstfunctie.

c In welk punt van het toegestane gebied is W maximaal?

d Hoeveel bedraagt de maximaal mogelijke winst?

Opgave 2

In een rijwielfabriek worden elke week fietsen en e-bikes gemaakt. De winst op een fiets is € 150,00 en op een e-bike € 450,00. Per week kan deze fabriek hoogstens 120 fietsen of 70 e-bikes maken. In totaal is er voor 140 fietsen en e-bikes opslagruimte. Op een fiets wordt alleen een achterrem aangebracht, op een e-bike zowel een voorrem als een achterrem. Het bedrijf produceert maximaal 180 van deze remmen per week.
Bereken de maximale winst per week.

a Welke variabelen kies je?

b Aan welke randvoorwaarden moeten de variabelen voldoen?

c Teken het toegestane gebied.

d Teken de twee niveaulijnen $W = 20000$ en $W = 30000$.

e In welk punt van het toegestane gebied is W maximaal?

f Hoeveel bedraagt de maximaal mogelijke winst?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Er zijn beslissingsproblemen waarin je een functie wilt maximaliseren of minimaliseren, afhankelijk van bepaalde voorwaarden. Die functie noem je de **doelfunctie** en de voorwaarden heten **randvoorwaarden**.

Als zowel de randvoorwaarden als de doelfunctie lineair zijn, spreek je van **lineair programmeren**. Ga als volgt te werk als de doelfunctie van twee variabelen afhangt:

- Kies variabelen, bijvoorbeeld x en y.
- Stel een formule op voor de doelfunctie $z = ax + by + c$.
- Formuleer de randvoorwaarden als lineaire ongelijkheden $px + qy \leq r$.
- Teken het gebied waarbinnen de punten (x,y) liggen die aan de randvoorwaarden voldoen.
- Bepaal de maximale of minimale waarde van de doelfunctie, bijvoorbeeld van een winstfunctie of een kostenfunctie die je wilt maximaliseren of minimaliseren.

Een snelle manier om de maximale of minimale waarde van de doelfunctie te bepalen, is de **randenwandelmethode**. Je bepaalt dan de hoekpunten van het toegestane gebied en berekent in die punten de uitkomst van de doelfunctie. De optimale waarde is daarmee zo gevonden.

Voorbeeld 1

Een koffiebranderij gebruikt twee soorten koffie: arabicabonen en robustabonen. Na het branden en fijnmalen worden deze twee soorten koffie gemengd tot de melanges ‘Zilvermerk’ en ‘Roodmerk’. Zilvermerk bevat een mengsel van 400 gram arabicakoffie en 100 gram robustakoffie. Bij Roodmerk is de verdeling 200 gram arabicakoffie en 300 gram robustakoffie.

De bedrijfsleider van de koffiebranderij heeft berekend dat op een pak Zilvermerk € 0,80 winst wordt gemaakt en op een pak Roodmerk € 0,50.

De branderij beschikt over een wekelijkse voorraad van 6000 kg arabicabonen en 6000 kg robustabonen. De branderij kan nooit meer dan 12000 pakken Zilvermerk en 20000 pakken Roodmerk per week verkopen.

De koffiebranderij wil weten bij welke weekproductie de winst zo groot mogelijk is. Geef alle gegevens die nodig zijn om dit probleem op te lossen overzichtelijk weer.

Antwoord

Breng alle gegevens overzichtelijk in beeld.

	arabica	robusta	winst	max.verkoop
Zilvermerk	0,4 kg/pak	0,1 kg/pak	€ 0,80/pak	12000
Roodmerk	0,2 kg/pak	0,3 kg/pak	€ 0,50/pak	20000
totale voorraad	6000 kg	6000 kg		

Tabel 1

De beslissingsvariabelen zijn:

- x het aantal pakken Zilvermerk per week
- y het aantal pakken Roodmerk per week

De doelfunctie is $W = 0{,}80x + 0{,}50y$.
De randvoorwaarden zijn:

- $0 \leq x \leq 12000$
- $0 \leq y \leq 20000$
- $0{,}4x + 0{,}2y \leq 6000$
- $0{,}1x + 0{,}3y \leq 6000$

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Licht toe hoe je aan de randvoorwaarden voor x en y komt.

b Teken het toegestane gebied.

c Teken twee niveaulijnen van de doelfunctie.

d In welk punt van het toegestane gebied is W maximaal?

e Hoeveel bedraagt de maximaal mogelijke winst?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Stel dat de koffiebranderij onbeperkt kan verkopen.

a Welke voorwaarden komen dan te vervallen? Hoe ziet het toegestane gebied er dan uit?

b Heeft dit invloed op de maximale winst?

Opgave 5

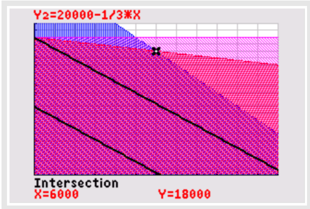
Bekijk **Voorbeeld 1**. De koffiebranderij besluit de samenstelling van haar Zilvermerk-melange aan te passen. Zilvermerk bevat nu 300 gram arabicakoffie en 200 gram robustakoffie. De winst op een pak Zilvermerk wordt daardoor € 0,70. De rest van de gegevens blijft ongewijzigd.

a Welke aantallen pakken Zilvermerk en Roodmerk zullen er nu worden geproduceerd?

b Hoeveel bedraagt de maximale winst?

Voorbeeld 2

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.
Je kunt nu het toegestane gebied tekenen en het probleem (de winst maximaliseren) oplossen.



Figuur 3

Dit hoeft niet met behulp van niveaulijnen. Omdat het om een lineaire doelfunctie en dus om een lineair probleem gaat, bereik je de maximale (of minimale) winst altijd in een hoekpunt van het toegestane gebied. Je kunt dus volstaan met het berekenen van al die hoekpunten en de bijbehorende waarden door x en y in de doelfunctie in te vullen. Dan wordt snel duidelijk waar de maximale winst wordt behaald.

Deze methode wordt wel de ‘randenwandelmethode’ genoemd. Je wandelt als het ware over de grenzen van het toegestane gebied.

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Bepaal zelf alle hoekpunten van het toegestane gebied.

b Bereken de winst W in elk van de hoekpunten van het toegestane gebied.

Opgave 7

Gebied G wordt begrensd door:

- $5 \leq x \leq 32$
- $y \geq 0$
- $3x + 5y \leq 215$
- $12x + 10y \leq 260$

De doelfunctie is $W = 2x + y$, waarbij x en y geheel moeten zijn.

a Teken het gebied G.

b Bepaal met behulp van de randenwandelmethode het maximum en het minimum van W op het gebied G.

Voorbeeld 3

Een firma moet 200 dozen, elk met 40 literblikken appelmoes, naar twee filialen transporteren. Deze dozen komen uit drie magazijnen. De transportkosten in euro per doos zijn weergegeven in de tabel.

	magazijn 1	magazijn 2	magazijn 3
filiaal 1	2	1	5
filiaal 2	7	3	8

Tabel 2

In magazijn 1 staan 50 dozen, in magazijn 2 ook 50 en in magazijn 3 zijn er 100 dozen.

Naar filiaal 1 moeten 80 dozen, naar het andere filiaal 120.

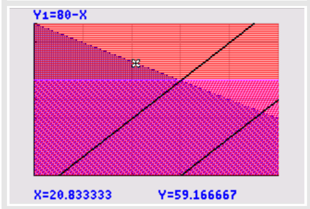
Hoe kun je dit transportprobleem zo oplossen dat de totale benodigde transportkosten zo klein mogelijk zijn?

Antwoord

De variabelen zitten in het aantal dozen dat van een bepaald magazijn naar een bepaald filiaal moet. Er zijn echter geen zes variabelen, want neem aan dat je x dozen van magazijn 1 naar filiaal 1 stuurt, dan kunnen er nog $50 - x$ dozen naar filiaal 2. En zo kun je doorgaan, dat is in de tabel weergegeven.

	magazijn 1	magazijn 2	magazijn 3	totaal
filiaal 1	x	y	$80 - x - y$	80
filiaal 2	$50 - x$	$50 - y$	$120 - (50 - x) - (50 - y)$	120
totaal	50	50	100	

Tabel 3



Figuur 4

Elk van deze zes uitdrukkingen in x en y is positief en dat levert een randvoorwaarde op.
De doelfunctie wordt gevormd door de totale transportkosten:
$K = 2 \cdot x + 1 \cdot y + 5 \cdot (80 - x - y) + 7 \cdot (50 - x) + 3 \cdot (50 - y) + 8 \cdot (20 + x + y)$
Bepaal nu alleen nog de waarden van x en y waarin K minimaal is.

Opgave 8

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

a Stel alle randvoorwaarden op.

b In welk punt van het toegestane gebied is K minimaal?

Opgave 9

Een oliemaatschappij heeft een voorraad van 200000 barrels in Koeweit, 150000 barrels in Galveston en 100000 barrels in Caracas. Een klant in New York heeft 300000 barrels besteld. Een tweede klant in Londen wil de overige 150000 barrels wel afnemen. De transportkosten in dollarcent per barrel bedragen:

	New York	Londen
Koeweit	38	35
Galveston	10	22
Caracas	18	25

Tabel 4

a Maak een schema van het transport van de totale voorraad van deze oliemaatschappij in het geval er 140000 barrels van Koeweit naar New York en 100000 van Galveston naar New York worden getransporteerd. Wat zijn de bijbehorende transportkosten?

b Bereken door middel van lineair programmeren een transportschema waarbij de transportkosten minimaal zijn.

(naar: examen vwo wiskunde A in 1983, eerste tijdvak)

Verwerken

Opgave 10

Gebruik in deze opgave de methode van lineair programmeren en laat alle stappen duidelijk zien.

Gebied G wordt begrensd door:

- $x \geq 0$
- $0 \leq y \leq 60$
- $x + 2y \leq 160$
- $4x + y \leq 400$

De doelfunctie is: $W = x + y$

a Teken het gebied G.

b Bepaal het maximum en het minimum van W op het gebied G.

Opgave 11

Een rijwielhandelaar krijgt een eenmalig aanbod van een fietsenfabriek. Hij kan kinderfietsen inkopen voor € 250,00 per stuk en e-bikes voor € 1000,00 per stuk. Hij heeft de volgende beperkingen:

- Zijn beschikbare kapitaal is € 48000,00.
- De beschikbare opslagruimte is 50 m^2. Voor een kinderfiets is 0,5 m^2 opslagruimte nodig en voor een e-bike 1 m^2.
- Hij wil niet meer dan 40 kinderfietsen op voorraad hebben.
- Op een kinderfiets wordt € 200,00 winst gemaakt, op een e-bike € 450,00.

De vraag is welke aantallen kinderfietsen en e-bikes de handelaar zal bestellen om een zo groot mogelijke winst te maken.

a Breng alle stappen in kaart om dit probleem met lineair programmeren op te kunnen lossen.

b Wat is de oplossing van het probleem?

c Als de voorwaarde dat hij maximaal 40 kinderfietsen op voorraad wil hebben vervalt, welke invloed heeft dat op de bestelling van de handelaar?

Opgave 12

Een fabrikant produceert pakken kippenvoer, gemaakt van aardappelen en bonen. Per pak moet het kippenvoer minimaal 13 gram eiwit, 100 gram zetmeel en 18 gram vet bevatten. De voedingsstoffen van aardappelen en bonen zijn weergegeven in de tabel.

	eiwit	zetmeel	vet
aardappelen (kg)	25 g	400 g	40 g
bonen (kg)	50 g	200 g	40 g

Tabel 5

De inkoopprijs is 15 eurocent per kilogram aardappelen en 20 eurocent per kilogram bonen.

a Bereken de minimale kosten voor 100 pakken kippenvoer.

b Bereken, zonder op de kosten te letten, het minimale gewicht van 100 pakken kippenvoer, onder dezelfde voorwaarden voor de benodigde hoeveelheden vet, zetmeel en eiwit.

Opgave 13

Een fabrikant van tweedrank gebruikt twee grondstoffen, perziksap en sinaasappelsap. Hiermee maakt hij Sizik en Pernaas.

Sizik wordt gemaakt door 1800 liter sinaasappelsap te mengen met 400 liter perziksap. Pernaas is een mengsel van 100 liter perziksap en 1500 liter sinaasappelsap.

De winst op 2200 liter Sizik is € 1000,00.
De winst op 1600 liter Pernaas is € 500,00.
De fabrikant heeft 1000 liter perziksap en 6600 liter sinaasappelsap ingekocht. Hij wil daarmee zoveel mogelijk winst maken.

a Hoeveel literpakken van elke tweedrank moet hij maken om een maximale winst te krijgen? Hoe groot is de maximale winst?

b Houdt de fabrikant nog een bepaalde hoeveelheid sap over?

Opgave 14

Een bedrijf beschikt over twee fabrieken, een fabriek in Nederland en een fabriek in China, om een bepaald product te maken. In de fabriek in Nederland worden dagelijks 5000 eenheden van dit product gemaakt, in de fabriek in China zijn dat er 7000 per dag.

Dit product wordt verkocht aan drie grote internationale warenhuizen, A, B en C. Volgens de gesloten contracten moeten er dagelijks 3000 eenheden naar A, 4500 eenheden naar B en 4500 eenheden naar C worden getransporteerd. De transportkosten in euro per eenheid product zijn weergegeven in de tabel.

	naar A	naar B	naar C
fabriek NL	3	2	4
fabriek CN	5	3	4

Tabel 6

De bedrijfsleiding wil de transportkosten minimaliseren.

a Stel een formule op voor de transportkosten T.

b Bereken bij welk transportschema de transportkosten minimaal zijn.

Opgave 15

In een fabriek worden twee soorten tennisrackets gemaakt, rackets met een aluminium frame en rackets met een kunststof frame. De winst op een racket met een aluminium frame is € 55,00, voor een racket met een kunststof frame is dat € 20,00. In de fabriek staan 25 machines. Daarop kunnen per dag 150 kunststof rackets of 30 aluminium rackets worden gemaakt. Er werken 20 mensen aan de productie van deze rackets. Voor het maken van twee aluminium rackets is één persoon een hele dag bezig, terwijl hij per dag vijf kunststof rackets kan produceren.

Het gaat de bedrijfsleiding om het maken van zoveel mogelijk winst per dag.

a Wat zijn de beslissingsvariabelen en de randvoorwaarden van dit probleem? Aan welke ongelijkheden moeten de variabelen voldoen?
Breng het toegestane gebied in beeld.

b Welke doelfunctie hoort bij dit probleem en wat is de oplossing van het probleem?

c Hoe verandert de maximale winst als de fabrikant er één machine bij koopt?

d Hoe verandert de maximale winst als er één werknemer extra aan de productie van deze rackets wordt toegevoegd?

Toepassen

Opgave 16: Arbowet

De arbeidsomstandighedenwet schrijft voor dat bij het bouwen en inrichten van werkplaatsen rekening wordt gehouden met de gezondheid, de veiligheid en het welzijn van de mensen die er werken. Het ‘Handboek Ergonomie’ geeft op basis daarvan richtlijnen voor de hoogte van werkplaatsen.

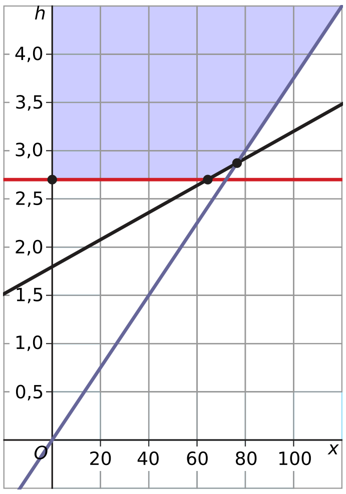
Een belangrijk criterium is de hoeveelheid vrije luchtruimte per persoon: dat is de ruimte die per persoon beschikbaar is, buiten de ruimte die de personen zelf innemen. Het Handboek Ergonomie noemt twee voorwaarden. Voorwaarde A geeft aan hoeveel vrije luchtruimte er ten minste per persoon moet zijn, voorwaarde B zegt hoeveel daarvan zich boven een hoogte van 1,80 meter moet bevinden.

	werkplaats voor maximaal 9 personen	werkplaats voor meer dan 9 personen
A. minimale vrije luchtruimte	6 m^3 per persoon	7 m^3 per persoon
B. minimale vrije luchtruimte boven 1,80 m	2,4 m^3 per persoon	2,8 m^3 per persoon

Tabel 7

Volgens de tabel zou een werkplaats lager mogen zijn naarmate het vloeroppervlak groter is. Om te voorkomen dat een ruimte te laag wordt, geeft het Handboek ook nog voorwaarden voor de hoogte. Zo moet een werkplaats met een vloeroppervlak van 200 m^2 een hoogte van ten minste 2,70 meter hebben.

Een werkplaats heeft een vloeroppervlak van 200 m^2. De hoogte van de werkplaats is h (meter). Uit de voorwaarden in de tabel volgt dat h afhangt van het aantal personen x waarvoor de werkplaats bestemd is. Volgens de voorwaarde uit het Handboek is $h \geq 2{,}70$.
Voorwaarden A en B kunnen ieder ook als ongelijkheid met bijbehorende grenslijn worden genoteerd en het toegestane gebied ziet er als volgt uit:



Figuur 5

Voor kleine waarden van x is de voorwaarde $h \geq 2{,}70$ de strengste voorwaarde: als daaraan is voldaan, is zeker aan de andere twee voorwaarden voldaan. Het komt ook voor dat voorwaarde B uit de tabel de strengste voorwaarde is.

Onderzoek bij welke aantallen personen dat het geval is.

(bron: examen wiskunde A in 2003, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 17

Gebruik de methode van lineair programmeren en laat alle stappen duidelijk zien. Gebied G wordt begrensd door:

- $x \geq 0$
- $0 \leq y \leq 50$
- $2x + 3y \leq 240$
- $5x + 2y \leq 500$

De doelfunctie is $W = 2000 - x - y$.

a Teken het gebied G.

b Bepaal het maximum en het minimum van W op het gebied G.

Opgave 18

Een bepaald bedrijf assembleert twee typen computers: type I en type II. Er is voor elk type een assemblagelijn opgezet, waarop per dag hoogstens 50 computers in elkaar kunnen worden geschroefd. Met het maken van een computer van type I is één werknemer 1 dag bezig. Het maken van een computer van type II kost één werknemer 1,5 dag. Er zijn per dag 110 werknemers bezig met de assemblage van deze twee typen computers. Er kunnen niet meer dan 70 van die computers per dag worden verpakt, dus worden er ook niet meer gemaakt.
Type I geeft een opbrengst van € 2400,- per stuk; voor type II is de opbrengst € 3000,- per stuk. De vraag is: hoeveel computers van elk type zal men per dag produceren? Ga uit van het streven naar een zo groot mogelijke opbrengst.

a Geef alle voorwaarden weer en teken het toegelaten gebied. Kies zelf geschikte variabelen.

b Beantwoord de vraag. Geef een toelichting bij het antwoord.

Op de verpakkingsafdeling werken zeven mensen aan het inpakken van deze typen computers. Is het verstandig om die afdeling meer mankracht te geven? Dat gaat dan wel ten koste van de 110 mensen die de apparaten assembleren.

c Beantwoord deze vraag en geef een toelichting bij je antwoord.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.