1.2 Functies van meerdere variabelen

Inleiding

De opbrengst R van de verkoop van de kaarten voor een bepaalde voorstelling hangen af van het aantal verkochte kinderkaarten x en het aantal verkochte kaarten voor volwassenen y. Je zegt dan dat R een functie is van twee variabelen, namelijk x en y. Ook zijn er vaak randvoorwaarden (hier bijvoorbeeld het maximaal aantal kaarten voor deze voorstelling) die bepalen welke waarden x en y kunnen aannemen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip functie van meerdere variabelen en de bijbehorende randvoorwaarden;
- een voorstelling maken van de waarden van een functie van twee variabelen.

Voorkennis

- werken met (vooral lineaire) functies, domein en bereik;
- vergelijkingen oplossen.

Verkennen

Opgave V1

In een klein theater zijn 300 zitplaatsen. Kinderkaarten kosten € 3,50 en kaarten voor volwassenen € 5,00. Het aantal kinderen wordt aangegeven met k en het aantal volwassenen door v.
De theaterdirectie weet uit ervaring dat de voorstelling zonder problemen verloopt als er bij iedere twee kinderen minstens één volwassene hoort en stelt dit als eis bij de verkoop van de kinderkaartjes.
Bij welke aantallen kaartjes levert een voorstelling een zo groot mogelijke opbrengst?

a Welke variabelen zijn er? Kun je uitleggen waarom hierbij de ongelijkheden $k + v \leq 300$ en $k \leq 2v$ horen?

b Welke formule hoort er bij opbrengst R (in euro)?

c Hoe kun je er nu voor zorgen dat R zo groot mogelijk wordt en toch aan de beschreven voorwaarden voldoet?

Uitleg 1

In een klein theater zijn 300 zitplaatsen. Kinderkaarten kosten € 3,50 en kaarten voor volwassenen € 5,00. Het aantal kinderen wordt aangegeven met k en het aantal volwassenen met v.
De theaterdirectie weet uit ervaring dat een voorstelling zonder problemen verloopt als er bij iedere twee kinderen minstens één volwassene hoort en stelt dit als eis bij de verkoop van kinderkaartjes.
Bij welke aantallen kaartjes levert een voorstelling een zo groot mogelijke opbrengst op?

Figuur 1

Werk met formules om dit probleem op te lossen. Noem de opbrengst R, dan is:

- $R = 3{,}50 \cdot k + 5{,}00 \cdot v$
- $k + v \leq 300$
- $k \leq 2v$
- $k \geq 0$ en $v \geq 0$

R is een functie van twee variabelen, namelijk van k en v. Dit betekent dat je bij elk punt (k,v) in een kv-assenstelsel een uitkomst voor R kunt berekenen.

Maar niet alle punten (k,v) kun je in deze functie van twee variabelen invullen. Er zijn beperkingen, die je randvoorwaarden noemt. Bij dit probleem zijn er vier randvoorwaarden:

- $k \geq 0$
- $v \geq 0$
- $k + v \leq 300$
- $k \leq 2v$

Om dit probleem op te lossen doe je het volgende:

- Teken en arceer de gebieden in het kv-assenstelsel die bij dit probleem passen.
- Bereken in alle hoekpunten van het gebied de bijbehorende waarden van R.
- Bepaal de grootste van die waarden van R en bereken welke waarden voor k en v daarbij horen.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

a Licht eerst toe hoe alle ongelijkheden uit de gegevens zijn af te leiden.

Je kunt de punten die bij deze situatie passen in een assenstelsel aangeven.
Neem de waarden van k op de horizontale as en die van v op de verticale as.
Neem $k \geq 0$ en $v \geq 0$.

b Teken zo'n assenstelsel met daarin de lijn: $k + v = 300$.

c Arceer alle punten waarvoor geldt: $k + v \leq 300$

d Teken ook de lijn $k = 2v$ in het assenstelsel en arceer alle punten waarvoor geldt: $k \leq 2v$

e Waarom is het gebied dat je dubbel hebt gearceerd het domein van de functie $R = 3{,}50k + 5{,}00v$?

f Hoe zoek je uit in welk punt $R = 3{,}50k + 5{,}00v$ maximaal is?

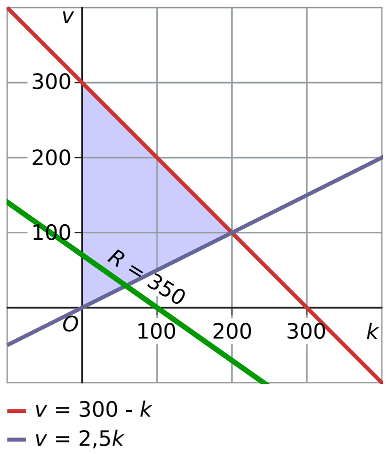
Uitleg 2

Bekijk de applet.

Bekijk de applet.

Bij hoeveel kaartjes levert een voorstelling een zo groot mogelijke opbrengst op? Of met andere woorden: in welk punt (k,v) is de waarde van $R = 3{,}50 \cdot k + 5{,}00 \cdot v$ maximaal?
Gebruik alleen de punten (k,v) die voldoen aan de voorwaarden:

- $k + v \leq 300$
- $k \leq 2v$
- $k \geq 0$
- $v \geq 0$



Figuur 2

De punten die aan deze voorwaarden voldoen, zijn aangegeven. Alle punten (k,v) waarbij R een vaste waarde heeft, liggen op een lijn.

Neem je bijvoorbeeld $R = 350$ dan geldt voor die punten: $3{,}50 \cdot k + 5{,}00 \cdot v = 350$.
Dit is te herleiden tot: $v = -0{,}70k + 70$.
Dat is een rechte lijn die door $(0,70)$ en $(100,0)$ gaat.
Voor alle punten van die lijn geldt: $R = 350$.

Neem je bijvoorbeeld $R = 700$, dan geldt voor die punten: $3{,}50 \cdot k + 5{,}00 \cdot v = 700$ Dit is te herleiden tot: $v = -0{,}70k + 140$.
Dat is een rechte lijn die door $(0,140)$ en $(200,0)$ gaat.
Voor alle punten van die lijn geldt: $R = 700$.

Zo kun je doorgaan. De lijnen die dit oplevert heten niveaulijnen, omdat de waarde van R een vast niveau heeft. Merk op dat de richtingscoëfficiënt van al deze niveaulijnen gelijk blijft. Wanneer je deze lijn omhoogschuift, vind je dat R zo groot mogelijk in het punt $(0,300)$ is.

Opgave 2

Bekijk de figuur in **Uitleg 1**.

a Laat zien dat alle punten waarvoor $R = 1050$ liggen op de lijn: $v = -0{,}7k + 210$.

b Teken de niveaulijn met $R = 1050$.

c Waarom wordt R maximaal in het punt (0,300)?

d Bereken de maximale waarde van R.

Opgave 3

Voor het bezoek aan de voorstelling stel je als eis dat het aantal volwassenen kleiner moet zijn dan, of gelijk moet zijn aan het aantal kinderen.

a Welke nieuwe randvoorwaarde levert dit op?

b Teken het gebied met punten die aan deze nieuwe voorwaarde voldoen.
Er blijven maximaal 300 zitplaatsen.

c In welk punt wordt R nu maximaal?

d Bereken de maximale waarde van R.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **functie van twee variabelen** heeft de vorm $z = f(x,y)$. Het gaat om een formule van de vorm $z = ...$ waarbij rechts van het isgelijkteken een uitdrukking staat waar alleen x en y als variabelen in voorkomen.

Bij zo'n functie van twee variabelen hoort bij het punt (x,y) in een xy-assenstelsel één uitkomst. Niet altijd passen alle punten in het xy-assenstelsel bij de beschreven situatie, vaak zijn er **randvoorwaarden**. Deze randvoorwaarden zijn ongelijkheden, zoals $x \geq 0$, $y \geq 0$, $ax + by \leq c$, enzovoort.
De punten van het (x,y)-assenstelsel die aan alle ongelijkheden voldoen vormen het **toegestane gebied**, het domein van de functie.

Om de functie $z = f(x,y)$ zichtbaar te maken, teken je niveaulijnen. Een **niveaulijn** van deze functie is een lijn waarop z een vaste waarde heeft. Door enkele van die niveaulijnen te tekenen, wordt duidelijk waar de functie maximaal dan wel minimaal is op het toegestane gebied.

In praktijksituaties zal er vaak sprake zijn van een **functie van meerdere variabelen**. Bij meer dan drie variabelen kun je zo'n functie niet meer in beeld brengen. Je hebt dan computerprogramma's nodig om iets over zo'n functie, het toegestane gebied en het maximum of minimum te kunnen zeggen.

Voorbeeld 1

Bepaal het maximum en het minimum van de functie $z = -x + 2y$ voor de punten (x,y) die voldoen aan de randvoorwaarden:

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $x + y \leq 10$
- $y - x \leq 5$

Antwoord

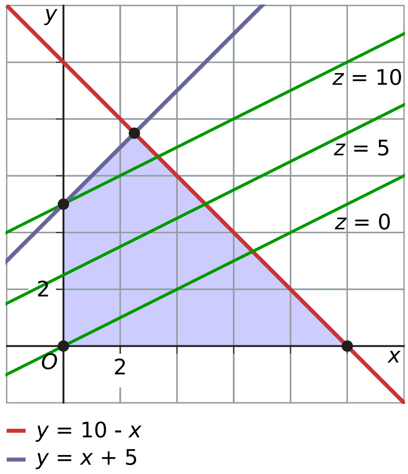
Teken het toegestane gebied.

- Maak een assenstelsel met $x \geq 0$ en $y \geq 0$.
- Teken daarin de lijnen $x + y = 10$ en $y - x = 5$.
- Arceer het gebied dat voldoet aan $x + y \leq 10$ en $y - x \leq 5$.

Teken vervolgens enkele niveaulijnen, bijvoorbeeld bij $z = 0$, $z = 5$ en $z = 10$.

- $z = 0$ geeft $-x + 2y = 0$ en hieruit volgt: $y = 0{,}5x$.
- $z = 5$ geeft $-x + 2y = 5$ en hieruit volgt: $y = 0{,}5x + 2{,}5$.
- $z = 10$ geeft $-x + 2y = 10$ en hieruit volgt: $y = 0{,}5x + 5$.

Op grond van de ontstane figuur is zichtbaar dat z maximaal is in het snijpunt van de lijnen $x + y = 10$ en $y - x = 5$. Dat snijpunt is $(2{,}5; 7{,}5)$. z is maximaal 12,5.
Op grond van de ontstane figuur is zichtbaar dat z minimaal is in $(10{,}0)$.
z is minimaal -10.



Figuur 3

Opgave 4

Gegeven is de functie $z = 3x + y$ en de randvoorwaarden:

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $x + y \leq 8$
- $y - 0{,}5x \leq 3$

a Teken het toegestane gebied.

b Teken de niveaulijnen $z = 0$, $z = 5$ en $z = 10$.

Opgave 5

Je moet een groep van 30 personen van drinken voorzien. Je koopt literpakken sinaasappelsap van € 1,80 per pak en literpakken appelsap van € 2,10 per pak. Je koopt minstens 6 en hoogstens 12 pakken. Je wilt maximaal twee keer zo veel appelsap als sinaasappelsap kopen. Noem het aantal pakken sinaasappelsap x en het aantal pakken appelsap y.
De totale kosten zijn K.

a Over welke functie van twee variabelen gaat dit probleem?

b Welke vijf randvoorwaarden zijn er?

c Teken het toegestane gebied.

d Bereken de maximale waarde van K.

Voorbeeld 2

Bepaal het maximum en het minimum van de functie $z = x \cdot y$ voor de punten (x,y) die voldoen aan de randvoorwaarden:

- $x \geq 1$
- $y \geq 0$
- $x + y \leq 12$
- $x - 4y \leq -7$

Antwoord

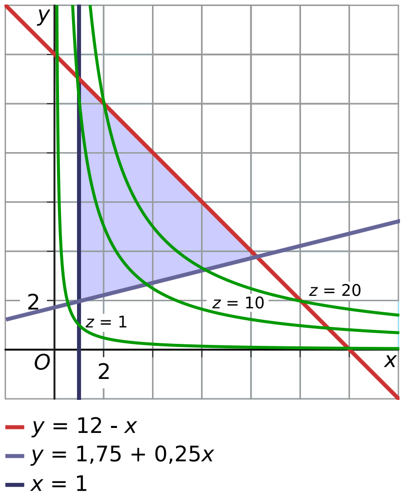
Teken het toegestane gebied.

- Maak een assenstelsel met $x \geq 0$ en $y \geq 0$.
- Teken daarin de lijnen $x = 1$, $x + y = 12$ en $x - 4y = -7$.
- Arceer het gebied dat voldoet aan $x \geq 1$, $x + y \leq 12$ en $x - 4y \leq -7$.

Teken vervolgens enkele niveaulijnen, bijvoorbeeld bij $z = 0$, $z = 5$ en $z = 10$.

- $z = 0$ geeft $x \cdot y = 0$ en hieruit volgt: $x = 0$ of $y = 0$
  Dit zijn de punten op beide assen.
- $z = 5$ geeft $x \cdot y = 5$ en hieruit volgt: $y = \frac{5}{x}$
- $z = 10$ geeft $x \cdot y = 10$ en hieruit volgt: $y = \frac{10}{x}$

De niveaulijnen zijn hier geen rechte lijnen, dat is zichtbaar met de grafische rekenmachine.



Figuur 4

Uit de verkregen figuur blijkt dat z maximaal is als de grafiek van $y = \frac{p}{x}$ de lijn $x + y = 12$ raakt. Hiermee zijn p en het punt waarin z maximaal is te berekenen.

Uit de verkregen figuur blijkt dat z minimaal is in (1,2), het snijpunt van $x = 1$ en $y = 0{,}25x + 1{,}75$. z is minimaal $1 \cdot 2 = 2$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Teken het toegestane gebied en enkele niveaulijnen met je grafische rekenmachine.

Voor de coördinaten van het punt waarin z maximaal wordt geldt: $x + y = 12$ en $-\frac{p}{x^2} = -1$

b Licht dit toe en bereken de coördinaten van dit punt.

c Bereken de maximale waarde van z.

Opgave 7

Van een rechthoekig stuk grond mag de omtrek niet groter zijn dan 240 meter, zo veel hekwerk (met ingang) is er voor de omheining beschikbaar. Er moet een rechthoekig grasveld op komen, dat is omsloten door stroken met bloeiende planten en struiken. Die stroken zijn aan drie zijden 4 meter breed en aan de vierde zijde (tegenover het toegangshek) 12 meter breed. Hoe groot kan de oppervlakte van het grasveldje maximaal worden?

a Over welke functie van twee variabelen gaat dit probleem?

b Welke randvoorwaarden zijn er?

c Teken het toegestane gebied.

d Bereken de maximale waarde van de oppervlakte van het grasveldje.

Verwerken

Opgave 8

Gegeven is de functie $z = x + y + 6$ op het gebied met punten (x, y) die voldoen aan de randvoorwaarden:

- $0 \leq x \leq 10$
- $0 \leq y \leq 5$
- $x + 5y \leq 30$

a Teken het toegestane gebied.

b Teken een drietal niveaulijnen van de gegeven functie.

c Bepaal de maximale en de minimale waarde van z op het gegeven gebied.

Opgave 9

Gegeven is de functie $z = 20 - 2x - y$ op het gebied met punten (x, y) die voldoen aan de randvoorwaarden:

- $0 \leq x \leq 6$
- $0 \leq y \leq 8$
- $x + y \leq 10$
- $x + 4y \geq 12$

a Teken het toegestane gebied.

b Teken een drietal niveaulijnen van de gegeven functie.

c Bepaal de maximale en de minimale waarde van z op het gegeven gebied.

Opgave 10

Een bedrijf beschikt over een machine waarmee twee varianten van een bepaald product kunnen worden gemaakt: variant A en variant B.
Voor 1000 kg van variant A moet de machine 3 uur werken en is 3000 kg grondstof nodig.
Voor 1000 kg van variant B moet de machine 6 uur werken en is 24000 kg grondstof nodig.
In totaal werkt de machine 42 uur per week en is er 30000 kg grondstof beschikbaar.
De winst op variant A is € 400,00 per 1000 kg en die op variant B is € 500,00 per 1000 kg.
Het bedrijf streeft naar een maximale winst op dit product.

a Over welke functie van twee variabelen gaat dit probleem?

b Welke randvoorwaarden zijn er?

c Teken het toegestane gebied.

d Bereken de maximale winst per week.

Opgave 11

Een boer heeft 1600 m^2 grond om aardappelen en bieten op te verbouwen. Hij reserveert daarvoor € 450,00 en 24 werkdagen.
De benodigde arbeidstijd per 100 m^2 schat hij voor de aardappelen op 4,5 dagen, net als voor de bieten.
De kosten per 100 m^2 schat hij op € 54,00 voor de aardappelen en € 36,00 voor de bieten.
De winst per 100 m^2 schat hij op € 100,00 voor de aardappelen en € 90,00 voor de bieten.

a Over welke functie van twee variabelen gaat dit probleem?

b Welke randvoorwaarden zijn er? Teken het toegestane gebied.

c Bereken de maximale winst die de boer kan behalen in één seizoen.

Opgave 12

Gegeven is de functie $z = x^2 + y^2$ voor alle punten (x, y) die voldoen aan de randvoorwaarden:

- $-5 \leq x \leq 5$
- $-5 \leq y \leq 5$
- $-8 \leq x + y \leq 8$
- $-8 \leq x - y \leq 8$

a Teken het toegestane gebied en enkele niveaulijnen van deze functie.

b Welke waarden neemt de gegeven functie aan op het toegestane gebied?

Toepassen

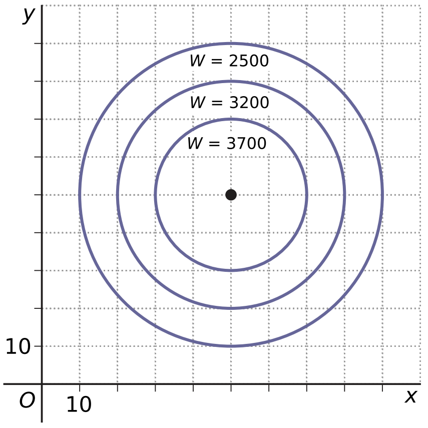
Opgave 13: Wijnhandelaar

Een wijnhandelaar verkoopt steeds in december kisten met flessen wijn. Dit jaar heeft hij voor het vullen van de kisten tot zijn beschikking: 192 flessen Ammency, 110 flessen Bourgand en 70 flessen Cereul.
Hij heeft een winkel in Haarlem en een winkel in Alkmaar.
Voor de winkel in Haarlem is het verstandig de kisten te vullen met 3 flessen Ammency, 1 fles Bourgand en 1 fles Cereul. De kisten voor Alkmaar vult hij allemaal met 2 flessen Ammency, 2 flessen Bourgand en 1 fles Cereul.

Op grond van zijn ervaringen met de afzetmogelijkheden in beide steden gaat hij uit van de formule:
$W = 100x - x^2 + 80y - y^2$
Hierbij is W de totale winst in euro bij verkoop van x kisten in Haarlem en y kisten in Alkmaar.
Bekijk het xy-assenstelsel met daarin een aantal isowinstlijnen.
De isowinstlijnen zijn cirkels met middelpunt (50,40).

Bepaal het toegestane gebied; bereken voor welke prijzen de wijnhandelaar zijn kisten wijn in Haarlem en Alkmaar moet verkopen om een maximaal mogelijke winst te verkrijgen en bereken zijn maximaal mogelijke winst.

(bron: examen vwo wiskunde A in 1993, eerste tijdvak)



Figuur 5

Testen

Opgave 14

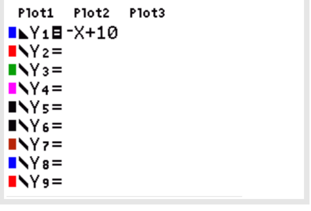
Gegeven is de functie $z = 2x - y$ voor de punten (x, y) die voldoen aan de randvoorwaarden $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 2y - 14$, $x \leq 2y + 10$ en $x + 4y \leq 34$.

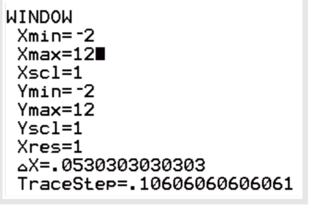
a Teken het toegestane gebied en een drietal niveaulijnen.

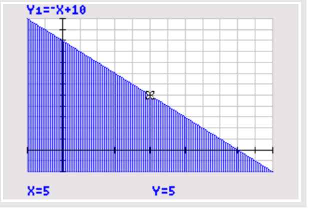
b Bereken de maximale en de minimale waarde die de gegeven functie van twee variabelen op dit gebied kan aannemen.

Practicum

Je kunt met sommige **grafische rekenmachines ongelijkheden tekenen** zoals $x + y \leq 10$ en dergelijke.
Op de TI-84 moet je daarvoor $x + y = 10$ in je grafische rekenmachine invoeren als $y_1 = -x + 10$ en vervolgens instellen dat de grafiek geen lijn wordt, maar een gearceerd vlakdeel, zie figuren. Je moet wel bedenken aan welke kant van de lijn je de inkleuring wilt zien. Met $x + y \leq 10$ wordt het gebied onder de lijn $x + y = 10$ bedoeld, dus het gebied waar (0,0) in ligt. (Kies een gemakkelijk punt om even na te gaan aan welke kant van de lijn je gebied zit.)







Figuur 6