5.3 Populatiegemiddeldes schatten

Inleiding

Je wilt een schatting maken van de gemiddelde lengte van zonnebloemen in midden Frankrijk in 2015. Dat doe je natuurlijk door één keer een grote steekproef te trekken, want alle zonnebloemen van dat jaar opmeten is onbegonnen werk. En ook meerdere grote steekproeven nemen is nauwelijks haalbaar en zeker veel te duur. Maar hoe betrouwbaar is je schatting op grond van één steekproef?

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- een betrouwbaarheidsinterval voor een populatiegemiddelde schatten.

Voorkennis

- de normale verdeling met zijn vuistregels over het gemiddelde en de standaardafwijking;
- kansen en grenswaarden berekenen met de normale verdeling;
- de wortel-n-wet gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt een schatting maken van de gemiddelde lengte van zonnebloemen in midden Frankrijk in 2015. Dat doe je natuurlijk door één keer een grote steekproef te trekken, want alle zonnebloemen van dat jaar opmeten is onbegonnen werk. En ook meerdere grote steekproeven nemen is nauwelijks haalbaar en zeker veel te duur.

a Je neemt een steekproef van 1000 zonnebloemen. Hun gemiddelde lengte is 271 cm. Is dat dan automatisch de gemiddelde lengte van alle zonnebloemen in midden Frankrijk in 2015?

b Hoe betrouwbaar is je schatting op grond van één steekproef?

Uitleg

Om een betrouwbare schatting te maken van de gemiddelde lengte van zonnebloemen in midden-Frankrijk hebben onderzoekers een aselecte en representatieve steekproef van 1000 zonnebloemen getrokken. De gemiddelde lengte van deze 1000 zonnebloemen blijkt 2,83 meter te zijn met een standaardafwijking van 75,9 cm.
Omdat de steekproef voldoende groot is, mag je ervan uitgaan dat de steekproevenverdeling normaal verdeeld is. Of de lengte van een zonnebloem normaal verdeeld is, maakt daarbij niet uit.

Figuur 2

Volgens de vuistregels zal in 95% van de steekproeven de gemiddelde lengte van zonnebloemen in midden-Frankrijk liggen tussen

$2{,}83 - 2 \cdot \frac{0{,}759}{\sqrt{1000}} \approx 2{,}78$ m en $2{,}83 + 2 \cdot \frac{0{,}759}{\sqrt{1000}} \approx 2{,}88$ m

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde zonnebloemlengte (m) is $[2{,}78; 2{,}88]$.

Het is ook mogelijk om de grenzen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval te berekenen met behulp van z-waarde 1,96: je vervangt dan de 2 in de vuistregel door 1,96. De z-waarde geeft voor een normale verdeling het aantal standaardafwijkingen aan dat een bepaalde variabele verwijderd is van het gemiddelde.
Bij de zonnebloemen krijg je dan opnieuw de grenzen 2,78 en 2,88.

Het voordeel van de z-waarde in plaats van de vuistregel is dat je dan ook andere betrouwbaarheidsintervallen kunt berekenen zoals bijvoorbeeld een 90%- of een 99%-betrouwbaarheidsinterval. Het betrouwbaarheidsinterval kun je aanpassen aan de eisen die het onderzoek verlangt. Dat is vergelijkbaar met de vaststelling van een significantieniveau bij een hypothesetoets.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde lengte van zonnebloemen in midden-Frankrijk is [2,78; 2,88]. Dit betekent dat:

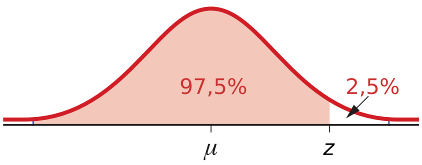
A. dat de lengte van een zonnebloem in midden-Frankrijk met een kans van 95% tussen de 2,78 en de 2,88 meter ligt.

B. dat de gemiddelde lengte van een zonnebloem in midden-Frankrijk met een kans van 95% tussen de 2,78 en de 2,88 meter ligt.

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt gebruik gemaakt van een factor 2.

a Geef een verklaring voor deze factor.



Figuur 3

De echte berekening van de grenzen van een betrouwbaarheidsinterval worden volgens de uitleg met z-waarden berekend.

b Verklaar met berekeningen het gebruik van z-waarde 1,96 bij het berekenen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Opgave 3

Soms wil een onderzoeker een kleiner betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde in een populatie.

a Wat kan een onderzoeker aan de steekproef veranderen om daarvoor te zorgen? Licht je antwoord toe.

b Wordt het betrouwbaarheidsinterval groter als een betrouwbaarheid van 99% wordt genomen in plaats van 95%?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij statistisch onderzoek is het **populatiegemiddelde**, het gemiddelde van een statistische variabele van de hele populatie, belangrijk.

Dat gemiddelde wordt meestal geschat door een steekproef te nemen en daarvan het **steekproefgemiddelde** te berekenen. Maar door het nemen van een steekproef ontstaat een toevalsfout. Deze toevalsfout ontstaat in het gemiddelde, maar ook in de standaardafwijking. Met de toevalsfout in de standaardafwijking wordt geen rekening gehouden.

Over de toevalsfout kan een uitspraak worden gedaan. Als het aantal steekproeven groot genoeg is, zal de **steekproevenverdeling** van de gemiddeldes een normale verdeling hebben. Let op: de variabele zelf kan en hoeft dus niet normaal verdeeld te zijn.

Je kunt de betrouwbaarheid van de steekproefuitslag als schatting voor het echte gemiddelde bepalen. Bij een betrouwbaarheid 95% bepaal je zo de grenzen van het **95%-betrouwbaarheidsinterval**:

- noem het steekproefgemiddelde $\overline{X}$ met steekproefomvang n;
- noem de steekproefstandaardafwijking S (als de populatiestandaardafwijking σ bekend is, gebruik dan $S = \sigma$);
- bereken de bijbehorende z-waarde met behulp van de standaardnormale verdeling: $z \approx 1{,}96 \approx 2$;
- het betrouwbaarheidsinterval is: $\left[\overline{X} - z \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$.

Met een betrouwbaarheid van 95% kun je aannemen dat het populatiegemiddelde μ een waarde heeft die in dit interval ligt. Is de gekozen betrouwbaarheid anders dan 95%, dan krijg je andere z-waarden. Zie ook het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Een groothandel verkoopt pakken hagelslag met een gemiddeld gewicht van 255 gram en een standaardafwijking van 4 gram.
De fabrikant van de pakken hagelslag wil niet te veel, maar ook niet te weinig hagelslag in de pakken voor de groothandel stoppen. Eens in de zoveel tijd trekt hij daarom een steekproef van 200 pakken hagelslag. De laatste steekproef die de fabrikant nam, had een steekproefgemiddelde van 253,75 gram.

Hoe groot is het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor deze steekproef en welke conclusie kan de fabrikant daaruit trekken?

Antwoord

Je hebt te maken met:
$\overline{X} = 253{,}75$ en $\sigma = 4$ en $n = 200$.

Je mag ervan uitgaan dat het steekproefgemiddelde normaal verdeeld is (centrale limietstelling). Voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval geldt:

De linkergrens is $253{,}75 - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{200}} \approx 253{,}2$ gram.

De rechtergrens is $253{,}75 + 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{200}} \approx 254{,}3$ gram.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de steekproef is $[253{,}2; 254{,}3]$.

De fabrikant kan nu met een betrouwbaarheid van 95% aannemen dat μ, het gemiddelde gewicht van een pak hagelslag uit zijn fabriek, tussen de 253,2 gram en de 254,3 gram ligt. Dit gemiddelde gewicht is lager dan gewenst.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Reken de rechtergrens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval zelf na.

b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de steekproef uit het voorbeeld met behulp van een z-waarde van 1,96.

Opgave 5

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**. De fabrikant besluit steekproeven van 50 pakken in plaats van 200 pakken te gebruiken.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval dat hoort bij een steekproefomvang van 50 pakken hagelslag en een steekproefgemiddelde van 253,75 gram.

b Benoem het verschil tussen het betrouwbaarheidsinterval uit a en het interval dat in het voorbeeld is berekend.

c Zou je de conclusie die de fabrikant in het voorbeeld heeft getrokken op basis van dit andere 95%-betrouwbaarheidsinterval, wijzigen? Beargumenteer je antwoord.

Opgave 6

a Als de grootte van de steekproef toeneemt, wordt dan de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval groter of kleiner?

b Leg uit waarom een smal betrouwbaarheidsinterval te verkiezen is boven een breed betrouwbaarheidsinterval.

c Wat zal er met de breedte van een betrouwbaarheidsinterval gebeuren als er in plaats van een 95%-betrouwbaarheidsniveau een hoger (99%) of lager (90%) betrouwbaarheidsniveau wordt gekozen?

Voorbeeld 2

Volgens een fabrikant is zijn vulmachine zo ingesteld dat het gemiddelde gewicht van de pakken suiker 1001 gram is met een standaardafwijking van 3 gram.
Om dit te controleren wordt door de Consumentenbond een steekproef van 50 pakken suiker genomen. Het steekproefgemiddelde is 999 gram.
Hoe groot is het 90%-betrouwbaarheidsinterval voor deze steekproef en welke conclusie kan de Consumentenbond daarop baseren?

Antwoord

Er is gegeven dat: $\overline{X} = 999$ en $\sigma = 3$ en $n = 50$.

Los op: $\text{P}(Z < z | \mu = 0 \text{ en } \sigma = 1) = 0{,}95$, je vindt $z \approx 1{,}64$.

Voor het gevraagde betrouwbaarheidsinterval geldt nu

linkergrens: $999 - 1{,}64 \cdot \frac{3}{\sqrt{50}} \approx 998{,}3$ gram

rechtergrens: $999 + 1{,}64 \cdot \frac{3}{\sqrt{50}} \approx 999{,}7$ gram

Het 90%-betrouwbaarheidsinterval is: $[998{,}3; 999{,}7]$.

Conclusie: met een betrouwbaarheid van (minimaal) 90% mag de fabrikant niet beweren dat het gemiddelde gewicht van de pakken suiker 1001 gram is.

Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.
Hoe luidt de conclusie als er een 99%-betrouwbaarheidsinterval gehanteerd wordt?

Opgave 8

Een laborant analyseert de concentratie in g/L van een actieve stof in een geneesmiddel. De standaardafwijking van deze concentratie is bekend, deze is 3 g/L.

a Stel dat er 10 metingen worden gedaan. Hoe breed is het 90%-betrouwbaarheidsinterval?

b Hoeveel metingen moet de laborant minstens doen om de breedte van het 90%-betrouwbaarheidsinterval kleiner dan 2 g/L te krijgen?

Verwerken

Opgave 9

Er wordt een steekproef genomen van lampen van de straatverlichting in een gemeente. De steekproef bestaat uit 500 lampen, waarvan de gemiddelde levensduur gelijk is aan 15000 uur en de standaardafwijking aan 1640 uur.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde levensduur van de lampen. Rond af op hele uren.

b Wat betekent dit interval?

c Bereken het 90%-betrouwbaarheidsinterval. Rond af op hele uren.

Opgave 10

De vuilnisdienst van een stad wil weten hoeveel huisvuil een gezin uit deze stad tweewekelijks buitenzet. Er wordt een aselecte steekproef genomen van 250 gezinnen. De hoeveelheid huisvuil heeft een gemiddeld gewicht van 12,5 kg en een standaardafwijking van 5,3 kg.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de hoeveelheid huisvuil (kg) dat per gezin in de stad wordt opgehaald. Rond af op één decimaal.

Opgave 11

Een vulmachine vult flesjes water. Een aselecte steekproef van 30 flesjes geeft een gemiddelde inhoud van 25,1 cL. De standaardafwijking is $s = 0{,}4$.

a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Rond af op één decimaal.

b Josephine beweert dat ongeveer 5% van de flesjes minder dan 25 cL bevat.
Rachid beweert dat ongeveer 2,5% van de flesjes minder dan 25 cL bevat.
Wie heeft gelijk? Licht je antwoord toe.

Opgave 12

Een bedrijf maakt en verkoopt lightproducten. Ze beweert dat haar producten slechts 140 calorieën per pakje bevatten.
De Consumentenbond controleert dit met een aselecte steekproef van 50 pakjes. De uitkomst is gemiddeld 147 calorieën.
De standaardafwijking van deze steekproef is 14 calorieën.

a De bewering van het bedrijf lijkt niet te kloppen.
Geef aan of de Consumentenbond mag zeggen: met 95% betrouwbaarheid wordt het gemiddelde van 140 calorieën in het lightproduct overschreden.

b Wat moet het bedrijf aanpassen aan het aantal calorieën, zodat de uitspraak van de Consumentenbond niet klopt?

Opgave 13

Een machine vult medicijnverpakkingen met poeder. Het vulgewicht is normaal verdeeld. De fabrikant bewaakt het vulgewicht. Daarom onderzoekt de kwaliteitsafdeling deze verpakkingen. Het is bekend dat de standaardafwijking van het vulgewicht 0,35 mg is.

De kwaliteitsafdeling wil het vulgewicht met een nauwkeurigheid van 0,2 mg bepalen. Hoe groot moet de steekproefomvang zijn om dit met een 99%-betrouwbaarheid te kunnen doen?

Toepassen

Opgave 14: Meetfouten

Bij een steekproef onder 30 pasgeboren baby's is de lengte (cm) gemeten. De gemiddelde lengte is 52,2 cm en de standaardafwijking 2,38 cm.

a Onder de metingen zit een meetfout. Een van de baby's is geen 43 maar 46 cm. De variantie neemt daardoor met 2,3 af.

Bereken het 90%-betrouwbaarheidsinterval. Geef de grenzen in centimeter en rond af op één decimaal.

Bij een andere steekproef is de lengte (cm) van 50 pasgeboren baby's gemeten. De gemiddelde lengte is 52,9 en de standaardafwijking 2,41.

b Door een fout in het meetinstrument zijn alle lengtes 1 cm te veel.

Bereken het 99%-betrouwbaarheidsinterval. Geef de grenzen in centimeter en rond af op één decimaal.

Testen

Opgave 15

Bij een statistisch onderzoek wordt het populatiegemiddelde $\mu \approx 44$ geschat. De standaardafwijking van de steekproevenverdeling is $\sigma \approx 1{,}2$.

a Hoe groot zijn de grenzen van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde?

b Het nagenoeg 100%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $\overline{X} \pm 3 \cdot \sigma$.
Hoe groot zijn de grenzen van het nagenoeg 100%-betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde?

Opgave 16

Een laborant analyseert de concentratie in g/L van een actieve stof in een geneesmiddel. De standaardafwijking van deze concentratie is bekend. Deze is 0,0062 g/L.

Hoeveel metingen moet de laborant minstens doen om de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval kleiner dan 0,01 te krijgen?

Practicum

Met de volgende practica kun je zien hoe je betrouwbaarheids berekent met de **grafische rekenmachine**. Doe alleen het onderdeel dat betrekking heeft op het betrouwbaarheidsinterval bij gemiddelden.

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio fx-CG50**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

Maar je kunt ook heel goed betrouwbaarheidsintervallen berekenen met behulp van **Excel**. Bekijk daartoe het practicum:

- **Steekproeven en uitspraken**