# 4.6 Totaalbeeld

## Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Kansmodellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

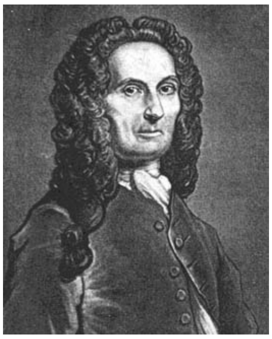
## Begrippenlijst

- continue kansvariabele — normale verdeling, normaalkromme — vuistregels
- kansen bij een normaal verdeelde variabele berekenen
- toevalsvariabelen optellen en aftrekken
- de wortel-n-wet voor een steekproef uit een normale verdeling
- normaal-waarschijnlijkheidspapier — standaardnormale kansvariabele, $z$-waarde

## Activiteitenlijst

- een normale verdeling herkennen — eigenschappen van de normaalkromme
- kansen berekenen bij een normale toevalsvariabele — grenswaarden berekenen bij gegeven normale kansen — $\mu$ of $\sigma$ berekenen bij een normaal verdeelde variabele
- $\mu$ en $\sigma$ berekenen bij de som of het verschil van twee kansvariabelen
- de wortel-n-wet toepassen
- met behulp van normaal-waarschijnlijkheidspapier onderzoeken of een statistische variabele normaal verdeeld is — standaardiseren om normaalverdelingen te vergelijken

## Achtergronden



**Figuur 1** Abraham de Moivre

In 1718 publiceerde **Abraham de Moivre** (1667—1754) 'The Doctrine of Chance', een boek over kansrekening waarin de eerste definitie van statistische onafhankelijkheid verschijnt, naast de aanpak van allerlei problemen op het gebied van dobbelen en andere kansspelen.

Bij de bestudering van herhaalde trekkingen (met teruglegging) van een schijf uit een vaas met alleen zwarte en witte schijven waarbij de kans op een zwarte en een witte schijf even groot is, ontdekte De Moivre dat een bijpassende kansverdeling een histogram heeft dat netjes klokvormig is. Later werd dit probleem gesimuleerd met het **bord van Galton** waarin balletjes naar beneden vallen op een aantal rijen met pinnen.

De Moivre bestudeerde ook sterftetabellen en werkte aan de theorie van de wiskunde rond levensverzekeringen.
In 1733 leidt hij een formule voor de normaalverdeling af.

De Duitse wiskundige **Carl Friedrich Gauss** (1777—1854) toonde aan dat de verdeling van meetfouten de normaalverdeling was en de bijbehorende verdelingskromme heet naar hem dan ook de gausskromme. In 1812 publiceerde de Franse wiskundige Laplace over deze onderwerpen het boek 'Théorie analytique des probabilités', wat tientallen jaren lang als standaardwerk over waarschijnlijkheidsrekening was.

# Testen

## Opgave 1

Bloeddruk wordt gemeten in mm Hg (spreek uit: millimeter kwik).
Bij een groep van duizend mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

**a** Hoeveel van de mannen hebben naar schatting een bloeddruk van minder dan 141 mm Hg?

**b** Hoeveel mannen hebben naar schatting een bloeddruk die meer dan twee keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?

**c** Maak op basis van de normaalkromme een schatting van het percentage mannen dat een bloeddruk heeft van meer dan 150 mm Hg en vergelijk dat met het daadwerkelijke percentage mannen met een dergelijke bloeddruk.

## Opgave 2

In een fabriek worden sokken machinaal vervaardigd. De gemiddelde lengte van een sok blijkt 47 centimeter te zijn. De lengte van de sokken is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 0,2 centimeter. De sokken worden in paren verkocht. In de fabriek worden paren gevormd door willekeurig twee sokken bij elkaar te stoppen.

**a** Als één sok een lengte heeft van 46,5 centimeter, hoe groot is dan de kans dat het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan 0,7 centimeter is?

**b** Wat is de kans dat als de eerste sok een lengte heeft van 49,5 centimeter, het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan 0,7 centimeter is? Waarom is deze kans niet gelijk aan de kans uit a?

**c** Wat kun je zeggen over de lengte van de 5% kortste sokken? Rond af op één decimaal.

De fabrikant vindt dat te veel sokken een lengte hebben die je bij c hebt berekend. Hij past daarom de standaardafwijking aan zodat nog maar 4% van de sokken korter is dan die lengte, in plaats van 5%. Het gemiddelde blijft gelijk.

**d** Bereken de nieuwe standaardafwijking. Rond af op twee decimalen.

**e** Wat gebeurt er met de normaalkromme van de soklengte als de standaardafwijking van 0,2 wijzigt in de standaardafwijking die je bij d hebt berekend?

## Opgave 3

In een fabriek verpakt een machine in kleine zakjes poedermelk voor in de koffie. Elk van die zakjes hoort 3 gram melkpoeder te bevatten. De fabrikant heeft zijn machine zo afgesteld dat het vulgewicht van deze zakjes normaal is verdeeld met een gemiddelde van 3,1 gram en een standaardafwijking van 0,06 gram.

**a** Hoeveel procent van de zakjes melkpoeder die deze machine produceert, is te licht?

De fabrikant voldoet hiermee niet aan de richtlijnen van de Europese Unie. Die schrijven voor dat niet meer dan 1% van de zakjes poedermelk minder dan 3 gram mag bevatten.

**b** De fabrikant besluit om iets meer melkpoeder in de zakjes te doen. Op welk gemiddelde vulgewicht moet hij de machine instellen om aan de richtlijn van de EU te voldoen? Ga ervan uit dat de standaardafwijking van de verdeling van de vulgewichten hetzelfde blijft.

**c** Je koopt een doosje met daarin twintig zakjes van het melkpoeder dat nog het oorspronkelijke gemiddelde van 3,1 gram heeft.

Hoeveel gram melkpoeder verwacht je gemiddeld per zakje in het doosje met twintig zakjes? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

**d** Hoe groot is de kans dat je in totaal minder dan $20 \cdot 3 = 60$ gram melkpoeder hebt gekocht?

Licht je antwoord toe met behulp van je kennis over de normaalkromme.

## Opgave 4

In een bedrijf wordt onder andere margarine geproduceerd. Het eindproduct wordt via een vulmachine in kuipjes gegoten, die volgens het opschrift een inhoud hebben van 500 gram. De gewichten van de gevulde kuipjes blijken normaal verdeeld te zijn. De standaardafwijking is ongeacht het vulgewicht waarop de vulmachine ingesteld staat steeds 4 gram. Het gemiddelde gewicht van zo’n kuipje is gelijk aan het vulgewicht waarop de machine is ingesteld.

De kuipjes worden verpakt in kartonnen dozen waarvan het gewicht normaal verdeeld is. Het gemiddelde gewicht van zo'n doos is 400 gram met een standaardafwijking van 15 gram. In één doos gaan twintig kuipjes.

**a** Het gewicht van de volle dozen is ook weer normaal verdeeld. Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het gewicht van een volle doos margarinekuipjes.

De keuringsdienst van waren gaat regelmatig na of de fabriek wel voldoende margarine in de kuipjes doet. Daartoe neemt de dienst één volgepakte doos uit de dagproductie en weegt die. Als het totale gewicht meer dan 50 gram naar beneden afwijkt van het gemiddelde, krijgt de fabrikant een boete.

**b** Hoe groot is de kans op een boete als de fabrikant het vulgewicht van 500 gram aanhoudt?

Natuurlijk zou de keuringsdienst van waren ook de twintig kuipjes zonder de bijbehorende doos kunnen wegen. Ook nu wordt een boete gegeven als 50 gram minder dan het gemiddelde gemeten zou worden.

**c** Waarom is deze controle eerlijker dan de eerste?

Na verloop van tijd veranderen de eisen die de keuringsdienst van waren stelt. In het vervolg zullen honderd kuipjes op hun gewicht worden gecontroleerd. Daarbij mag er maximaal één zijn die minder dan 495 gram weegt.

**d** Hoe groot is nu de kans op een boete, aangenomen dat de fabrikant de machine nog steeds op 500 gram heeft ingesteld?

## Opgave 5

Een schroefas van een schip verbindt de motor met de schroef. Deze as wordt op een of meer plaatsen ondersteund door een lager. Dit lager is een bronzen bus waarvan de binnendiameter zo goed mogelijk passend wordt gemaakt om de diameter van de as en waarin zich goed geoliede kogels bevinden die het draaien van de as mogelijk maken.
Er wordt gestreefd naar een binnendiameter van 15,0 millimeter van de bussen (en dus de lagers) en naar een diameter van 14,9 millimeter voor de assen. Na fabricage zijn zowel de binnendiameter van de lagers als de diameters van de assen normaal verdeeld:

Figuur 2

- Voor de assen geldt: $\mu = 14{,}9$ mm en $\sigma = 0{,}1$ mm.
- Voor de lagers geldt: $\mu = 15{,}0$ mm en $\sigma = 0{,}1$ mm.

Assen met een diameter groter dan 15,1 millimeter en lagers met een binnendiameter kleiner dan 14,8 millimeter worden na een test afgekeurd.

**a** Hoeveel procent van de assen en hoeveel procent van de lagers zal worden afgekeurd na een test?

**b** Bereken de diameter waarvoor geldt: de kans op een as met die diameter is gelijk aan de kans op een lager met die binnendiameter.

Uit een grote hoeveelheid, die evenveel assen als lagers bevat, neem je willekeurig een as en een lager.

**c** Hoe groot is de kans dat de lager niet om de as past?

## Opgave 6

De scores van een IQ-test in Nederland zijn bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 100.
15,8% van de mensen heeft een IQ van 85 of lager.

**a** Bereken de standaardafwijking bij deze IQ-test.

Als je een IQ hebt dat hoger is dan 130, dan word je hoogbegaafd genoemd.

**b** Bereken de $z$-waarde die hoort bij een IQ van 130.

Rond af op drie decimalen.

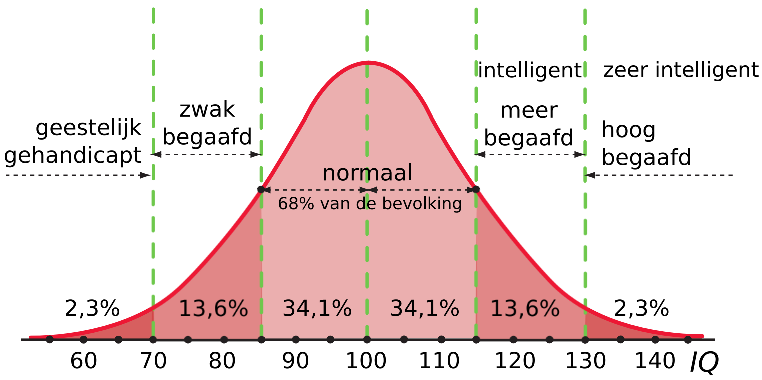
**c** In een ander land zijn de IQ-scores ook normaal verdeeld en de $z$-waarde die hoort bij hoogbegaafdheidsgrens is daar gelijk aan 1,923.

Welke uitspraak kun je nu doen over het verschil tussen beide landen?

# Toepassen

## Opgave 7: Intelligentiequotiënt

In het begin van de vorige eeuw werd er veel waarde gehecht aan het zogenaamde **intelligentiequotiënt (IQ)** van met name kinderen. In 1904 werd de psycholoog **Alfred Binet (1857—1911)** door de Franse overheid gevraagd een test te ontwerpen om ‘slimme’ van ‘domme’ kinderen te onderscheiden.




Figuur 3

Binet ontwierp een intelligentietest waarmee hij de intelligentieleeftijd van een kind vaststelde. Wanneer de intelligentieleeftijd wordt gedeeld door de werkelijke leeftijd (en met 100 vermenigvuldigd) dan krijg je het IQ. Dit IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde dat op 100 is gesteld. Zo is de Stanford-Binet intelligentieschaal ontwikkeld. Bekijk de normale verdeling van de IQ's zoals Binet die aantrof.

**a** Welk gemiddelde en welke standaardafwijking heeft het IQ volgens de Stanford-Binet-schaal?

**b** Is het IQ afhankelijk van je leeftijd?

**c** Hoeveel procent van de mensen heeft een minder dan normale intelligentie?

**d** Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van boven de 140?

**e** Welk IQ heeft de meest intelligente 10% van de bevolking volgens de Stanford-Binet-schaal?

## Opgave 8: Zwangerschap

De zwangerschapsduur bij mensen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 266 dagen en een standaarddeviatie van 16 dagen.

**a** Bij een premature geboorte wordt het kind minstens drie weken voor het gemiddelde geboren. Hoe groot is de kans daar op?

**b** In 7% van de gevallen duurt een zwangerschap zo lang dat de geboorte moet worden ingeleid. Vanaf welke zwangerschapsduur gebeurt dit dus?

**c** In 1973 beweerde een vrouw dat ze 310 dagen zwanger was geweest omdat op de dag van de bevalling haar man al 310 dagen als marinier van huis was. Hoe groot is de kans op een zwangerschap van minstens 310 dagen?

## Examen

### Opgave 9: Cakemeel

In een fabriek worden pakken met cakemeel gevuld. Op zo'n pak wordt vermeld: 'Inhoud 500 gram'. Veronderstel dat de inhoud per pak normaal verdeeld is met een gemiddelde van 500 g en met een standaarddeviatie van 4 g.

**a** Bereken in één decimaal het percentage pakken dat minder dan 495 g cakemeel bevat.

Volgens de fabrikant betekent de vermelding 'Inhoud 500 gram' dat slechts 25% van de pakken minder dan 500 g inhoud heeft. Als een pak een inhoud van minder dan 500 g heeft, spreekt hij van ondergewicht. Veronderstel bij de volgende drie vragen dat de fabrikant gelijk heeft en dat de standaarddeviatie van de normaal verdeelde inhoud 4 g bedraagt.

**b** Bereken in één decimaal de gemiddelde inhoud per pak.

In een rek van een kruidenierswinkel staan 20 pakken cakemeel afkomstig van bovengenoemde fabriek. Daarvan hebben er 5 een ondergewicht. Een klant neemt aselect 3 pakken uit het rek.

**c** Bereken in twee decimalen de kans dat geen van deze 3 pakken een ondergewicht heeft.

**d** Een banketbakker koopt 16 pakken rechtstreeks van de fabriek. Bereken in drie decimalen de kans dat hij minder dan 8000 g cakemeel heeft gekocht.

**(bron: examen wiskunde A vwo 1986, eerste tijdvak)**

### Opgave 10: Zeeppoeder

Een grootwinkelbedrijf heeft in zijn assortiment een eigen merk zeeppoeder. Het bedrijf beschikt over een vulmachine met een vulcapaciteit van 7536 kg per dag. Van de door de machine gevulde pakken is het gewicht normaal verdeeld, met een standaardafwijking van 40 g ongeacht de inhoud. De keuringsdienst van waren eist dat, op één decimaal, slechts 4,0% van de in de handel gebrachte pakken minder mag bevatten dan op de pakken vermeld staat. Het bedrijf brengt zeeppoeder op de markt in kleine pakken, waarop vermeld staat dat zij 1 kg zeeppoeder bevatten.
De vulmachine is ingesteld op 1070 g per pak.

**a** Onderzoek of aan de eis van de keuringsdienst van waren wordt voldaan.

De bedrijfsleiding overweegt om naast de kleine pakken met opschrift 1 kg ook gezinspakken met opschrift 2,5 kg op de markt te brengen.

**b** Op hoeveel gram per pak moet de vulmachine ingesteld worden voor de gezinspakken om aan de eis van de keuringsdienst van waren te voldoen?

**c** Neem aan dat het aantal geproduceerde kleine pakken twee maal zo groot is als het aantal gezinspakken. Hoeveel gezinspakken kunnen er dan maximaal per dag worden geproduceerd?

**(bron: examen wiskunde A vwo 1984, eerste tijdvak)**

### Opgave 11: Bewaking

Een zekere bank wordt 's nachts intensief bewaakt. Meerdere malen per nacht doet één van de bewakers een ronde door het gebouw. Op zo'n ronde moet hij zich op vijftien plaatsen melden door een speciale code in te toetsen in een meldkastje. De computer in de controlekamer registreert de tijdstippen waarop dit gebeurt. Ook schrijft de procedure voor dat de tijdstippen van vertrek en terugkomst worden geregistreerd. De kastjes zijn zodanig op de route geplaatst dat de zestien loopafstanden vrijwel even lang zijn. Uit overzichten over langere tijd blijkt dat, in het geval dat er niets bijzonders valt op te merken, de lengte van de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende meldingen van de bewaker vrijwel normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3,6 minuten en een standaarddeviatie van 0,7 minuten. In het geval dat een melding langer dan vijf minuten uitblijft, wordt een bewaker in de controlekamer automatisch gewaarschuwd dat er mogelijk iets aan de

hand is.
De bewaker heeft zich zojuist gemeld bij het vijfde kastje.

**a** Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de volgende melding langer dan 5,0 minuten uitblijft.

**b** Veronderstel dat de lengtes van de 16 tijdsintervallen bij een ronde door het gebouw onder normale omstandigheden onafhankelijk van elkaar zijn. Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de totale tijd van een ronde door het gebouw langer is dan 60,0 minuten.

Tijdens zo'n ronde kijkt de bewaker wel enige keren in de gang naar de kluis, maar hij gaat er niet in. In de gang naar de kluis is namelijk een alarminstallatie aangebracht die in directe verbinding staat met de meldkamer op het hoofdbureau van de politie. In het plafond zijn (onzichtbaar) vijf roterende sensoren aangebracht. 's Nachts gaat het alarm automatisch af zodra minstens één van deze sensoren geactiveerd wordt. De sensoren werken geheel onafhankelijk van elkaar. Voor elke sensor afzonderlijk geldt dat de kans op alarm (de detectiekans) in het geval dat iemand 's nachts de sensor passeert, gelijk is aan 0,45.

**c** Toon met een berekening aan dat de kans dat het alarm bij de politie afgaat als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, ongeveer gelijk is aan 95%.

De directie vindt deze kans te klein. Zij wil de sensorinstallatie zo laten verbeteren dat de kans op alarm als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, groter is dan 99,5%. Volgens de chef van de beveiliging kan dit op twee manieren bereikt worden:

- Het aantal sensoren met een detectiekans van 0,45 wordt uitgebreid; per bij te plaatsen sensor kost dit € 8000,00.
- Een aantal van de aanwezige sensoren wordt omgeruild tegen een nieuw type met een detectiekans van 0,80; per in te ruilen sensor kost dit € 9000,00.

**d** Bereken hoeveel men minimaal moet uitgeven om de sensorinstallatie zodanig te verbeteren dat aan de wens van de directie wordt voldaan.

**(bron: examen wiskunde A vwo 1991, tweede tijdvak)**

## Opgave 12: Lengte van vrouwen

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen omdat ze niet aan deze eis voldeden. De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van deze aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van volksgezondheid. Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met een gemiddelde $\mu$ en standaarddeviatie $\sigma$.

**a** Stel, uitgaande van het genoemde percentage, een verband op tussen $\mu$ en $\sigma$.

Neem aan dat $\mu = 160{,}4$ cm.

**b** Toon aan dat $\sigma \approx 7{,}2$ cm.

Stel je voor dat de groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 cm $V$ wordt genoemd. Voor de mediaan ($m$) van de lengte van de vrouwen van $V$ geldt dat 50% van de vrouwen uit $V$ langer is dan $m$.

**c** Toon aan dat $m \approx 172{,}6$, uitgaande van $\mu = 160{,}4$ cm en $\sigma = 7{,}2$ cm.

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91% sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselect gekozen groep van 10.000 vrouwen in de leeftijd 18 tot 65 jaar werden 1243 vrouwen aangetroffen met een lengte van meer dan 172,6 cm.

**d** Als je aanneemt dat de standaardafwijking niet is veranderd, wat is dan de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek?

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk wel was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen. Stel dat voor 1972 gold: $\mu = 164{,}0$ cm en $\sigma = 7{,}2$ cm.

**e** Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

**(bron: examen wiskunde A vwo 1990, eerste tijdvak)**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.