4.4 Wortel-n-wet

Inleiding

Als je iedere dag hetzelfde reistraject naar school aflegt en daarbij dagelijks een tijd moet wachten op je bus, zou je ook willen weten welke gemiddelde tijd je wekelijks of maandelijks in totaal op je bus naar school moet wachten.

In deze paragraaf leer je dat er handige rekenregels zijn voor de totale wachttijd op de bus en voor de bijbehorende standaardafwijking.

Je zult ook zien dat de standaardafwijking van de gemiddelde wachttijd per dag op je bus naar school afhangt van de hoeveelheid dagen dat je deze bus naar school neemt, hoe vreemd dat misschien in eerste instantie ook lijkt!

Je leert in dit onderwerp

- de wortel-n-wet gebruiken voor het berekenen van de verwachtingswaarden en de standaardafwijking van (het gemiddelde) van een herhaling van kansvariabelen.

Voorkennis

- een kansverdeling opstellen bij een kansvariabele;
- de regels voor de verwachting en de standaardafwijking van de som van verschillende kansvariabelen.

Verkennen

Opgave V1

Een scholier gaat regelmatig met de bus naar school. Hij hoeft altijd maar maximaal drie minuten op de bus te wachten. Voor de wachttijd T, in hele minuten, geldt de volgende kansverdeling:

t	0	1	2	3
$\text{P}(T = t)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 1

Deze week gaat de betreffende scholier 5 keer met de bus.

a Hoeveel wachttijd verwacht hij in totaal? En hoeveel gemiddeld per keer?

b Bereken de standaardafwijking van zijn totale wachttijd? Hoeveel bedraagt die standaardafwijking dan gemiddeld per keer?

Uitleg

Een scholier gaat regelmatig met de bus naar school. Hij hoeft altijd maar maximaal drie minuten op de bus te wachten. Voor de wachttijd T, in hele minuten, geldt de volgende kansverdeling:

t	0	1	2	3
$\text{P}(T = t)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 2

Hieruit volgt dat $\overline{T} = 1{,}5$, $\text{Var}(T) = 1{,}25$ en $\sigma(T) = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Om de gemiddelde wachttijd en de bijbehorende standaardafwijking te berekenen als de scholier vijf keer met de bus gaat, hoef je niet eerst een kansverdeling te maken. Je kunt de optelregels voor de som van onafhankelijke variabelen gebruiken. Als Z de totale wachttijd van de scholier is als hij vijf keer met de bus gaat, dan geldt:

- $\overline{Z} = \overline{T} + \overline{T} + \overline{T} + \overline{T} + \overline{T} = 5 \cdot \overline{T} = 7{,}5$
- $\sigma(Z) = \sqrt{(\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2 + (\sigma(T))^2} = \sqrt{5 \cdot (\sigma(T))^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$

De standaardafwijking van Z is $\sqrt{5 \cdot (\sigma(T))^2} = \sqrt{5} \cdot \sigma(T)$.

Om de gemiddelde wachttijd per keer te berekenen als de scholier vijf keer met de bus gaat, deel je het gemiddelde van Z door 5. Het gemiddelde is 1,5. De bijbehorende standaardafwijking wordt $\frac{2{,}5}{5} = 0{,}5$. Ga na dat dit hetzelfde is als $\frac{\sigma(T)}{\sqrt{5}}$. Dit is niet dezelfde standaardafwijking als de scholier maar één keer met de bus gaat. Dit heet de wortel-n-wet.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Leg uit waarom het handig is dat je de genoemde optelregels kunt gebruiken.

b Leg uit waarom er sprake is van vijf ‘onafhankelijke’ statistische variabelen.

Opgave 2

Stel dat de scholier twintig keer met de bus gaat en dat M de totale wachttijd (min) is.

a Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van M.

b Bereken het gemiddelde en de standaardwijking per keer.

Opgave 3

In een doosje theezakjes zitten twintig zakjes thee. Ieder theezakje weegt gemiddeld 1,75 gram met een standaardafwijking van 0,085 gram.

a Hoeveel is het gemiddelde nettogewicht in een ongeopend doosje theezakjes? En hoe groot is de bijbehorende standaardafwijking?

b Hoe groot is het gemiddelde gewicht van een theezakje uit een nog ongeopend doosje? En wat is de bijbehorende standaardafwijking?

c Welk verband bestaat er tussen de twee standaardafwijkingen die je net hebt berekend?

Ondertussen zijn er al zes theezakjes gebruikt.

d Hoe groot is het gemiddelde nettogewicht van het doosje met de overgebleven theezakjes? En hoe groot is de bijbehorende standaardafwijking?

e Hoe groot is het gemiddelde gewicht van een theezakje uit het doosje waar al zes theezakjes uit gebruikt zijn? En hoe groot is de bijbehorende standaardafwijking?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Heb je te maken met n onafhankelijke gelijke kansvariabelen X, dan geldt voor kansvariabele S, de som van deze n kansvariabelen:

- $\overline{S} = n \cdot \overline{X}$ of, als X normaal verdeeld is: $\mu(S) = n \cdot \mu(X)$
- $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

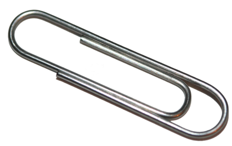
Dit heet de **wortel-n-wet**.

Voor de kansverdeling die hoort bij het gemiddelde $\overline{X}$ van n onafhankelijke gelijke kansvariabelen X geldt:

- $\mu\left(\overline{X}\right) = \frac{\overline{S}}{n} = \frac{n \cdot \overline{X}}{n} = \overline{X}$ of, als X normaal verdeeld is: $\mu\left(\overline{X}\right) = \frac{\mu(S)}{n} = \frac{n \cdot \mu(X)}{n} = \mu(X)$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma(S)}{n} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma(X)}{n} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld 1

Op doosjes paperclips van een bepaald merk staat: circa 100 stuks. Door tellingen is gebleken dat in deze doosjes het aantal paperclips normaal is verdeeld met gemiddeld 104,3 paperclips en een standaardafwijking van 3,5. Je haalt tien doosjes van die paperclips. Hoeveel paperclips verwacht je dat er totaal in de doosjes zitten en met welke standaardafwijking?
En hoeveel is de verwachtingswaarde van de gemiddelde inhoud van 10 doosjes en hoe groot is de standaardafwijking van de gemiddelde inhoud van 10 doosjes?



Figuur 1

Antwoord

Neem aan dat het aantal paperclips X in elk doosje niet afhangt van het aantal in de andere doosjes.

Het totale aantal paperclips in 10 doosjes is S. Dan geldt:

- $\mu(S) = 10 \cdot \mu(X) = 10 \cdot 104{,}3 = 1043$
- $\sigma(S) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) = \sqrt{10} \cdot 3{,}5 \approx 11{,}1$

De verwachting is 1043 paperclips met een standaardafwijking van ongeveer 11.

Voor het gemiddelde inhoud van 10 doosjes $\overline{X}$ geldt:

- $\mu\left(\overline{X}\right) = \frac{\mu(S)}{10} = \overline{X} = 104{,}3$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sqrt{10} \cdot \sigma(X)}{10} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{10}} \approx 1{,}1$

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je koopt vijf van die doosjes paperclips.

a Hoeveel paperclips verwacht je dat er totaal in de vijf doosjes zitten?

b Welke standaardafwijking heeft het aantal paperclips in deze vijf doosjes samen?

Opgave 5

Bekijk nogmaals **Voorbeeld 1**. Je koopt vijf van die doosjes paperclips.

a Hoeveel paperclips verwacht je dat er gemiddeld in een doosje zitten?

b Welke standaardafwijking heeft het gemiddelde aantal paperclips per doosje in deze steekproef van vijf doosjes?

Opgave 6

In een fabriek worden pakken met 1 kilo meel gevuld. De vulmachine is afgesteld op een gemiddeld vulgewicht van 1002 gram met een standaardafwijking van 4 gram. De pakken worden op hun beurt verpakt met een plastic folie in pakketten van 10 pakken.

a Bereken het gemiddelde gewicht van deze pakketten.

b Welke standaardafwijking geldt voor het gewicht van deze pakketten?

c Welk verwachtingswaarde en standaardafwijking geldt voor het gemiddelde van de pakken meel uit zo'n pakket?

Op een pallet worden 100 pakketten geplaatst.

d Welk gewicht verwacht je dat op het pallet is geplaatst en welke standaardafwijking geldt hiervoor?

e Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking gelden voor een pak meel dat uit een pallet wordt genomen?

Verwerken

Opgave 7

Het gewicht van een glas is 50 gram met een standaardafwijking van 2,8 gram.
De glazen worden in doosjes van zes verpakt.

a Wat is het gemiddelde gewicht van zo'n doosje?

b Welke standaardafwijking hoort daarbij? Geef je antwoord in gram en rond af op één decimaal.

Opgave 8

Jenna en Iris spelen een zelfbedacht spel met knikkers. Op basis van heel vaak spelen hebben ze berekend dat de volgende kanstabel bij het spel hoort:

k	-2	-1	0	2	3
$P(K=k)$	0,0032	0,1634	0,3456	0,2473	0,2405

Tabel 3

Kansvariabele K is het aantal knikkers winst/verlies per keer dat het spel wordt gespeeld.

a Hoe groot is het verwachte aantal knikkers winst/verlies na 35 keer spelen?

Welke standaardafwijking hoort daarbij?

b Wat is het gemiddelde aantal knikkers per spel dat je verwacht na 35 keer spelen?

Geef ook de bijbehorende standaardafwijking.

Opgave 9

Een bepaald type dvd-recorder wordt in dozen verpakt die een gemiddelde hoogte van 10 centimeter hebben met een standaardafwijking van 4 millimeter. Bij een groothandel wordt een aantal van deze dozen in een magazijn opgeslagen.

a Er worden 15 dozen op elkaar geplaatst. Bereken de verwachtingswaarde van de hoogte van de stapel dozen en geef de bijbehorende standaardafwijking.

b Bij het vervoer van deze dozen gebruikt men een vrachtwagen met een hoogte van 2,5 meter en een standaardafwijking van 1,9 centimeter. Bij het beladen van deze vrachtwagen wil men stapels maken van 25 dozen. Welke standaardafwijking voor de hoogte mag een doos dan hebben?

c Zal het altijd lukken om 25 dozen op elkaar te stapelen in een vrachtwagen? Leg uit waarom.

Opgave 10

Voor de dagproductie geldt dat het gemiddelde gewicht van een pak suiker 1002 gram is met een standaardafwijking van 3 gram. Je trekt een steekproef van tien pakken suiker uit die dagproductie.

a Welk gemiddelde gewicht zal de totale hoeveelheid suiker T in die steekproef hebben? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

b Bereken de kans dat het totale gewicht in de steekproef meer is dan 10 kilo.

c Welk gemiddelde gewicht zullen de pakken suiker in de steekproef hebben? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

d Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht van de pakken in de steekproef meer is dan 1 kilo.

Opgave 11

Een groenteboer verkoopt bakjes met fruit. Er zijn bakjes aardbeien van 300 gram met een standaardafwijking van 10 gram. Er zijn bakjes bramen van 200 gram met een standaardafwijking van 8 gram. En er zijn bakjes frambozen van 100 gram met een standaardafwijking van 5 gram.

Els maakt jam met deze drie soorten fruit. Ze heeft ook geleisuiker nodig. De juiste verhouding is 1 kilo suiker op 1 kilo fruit.
Els koopt één bakje aardbeien, twee bakjes bramen en drie bakjes frambozen.

a Hoeveel gram fruit verwacht Els te kopen? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

b Een pak geleisuiker van 1 kilo heeft een standaardafwijking van 12 gram.

Bereken de kans dat Els te weinig suiker heeft in verhouding tot het fruit dat ze heeft.

Toepassen

Opgave 12: Preiplanten kweken

Een tuinder zaait zaadjes voor preiplanten. In een doosje zitten tien zakjes met zaadjes. Uit één zakje zaadjes komen bij de tuinder gemiddeld twintig preiplanten op, met een standaardafwijking van 3,2.

a Hoeveel preiplanten kweekt de tuinder gemiddeld met één doosje zaadjes?
En welke standaardafwijking hoort daarbij?

b De tuinder zaait de zaadjes uit drie doosjes.

Bereken de kans dan er minder dan 580 preiplantjes opkomen.

De tuinder vindt deze kans te groot. Hij besluit de omstandigheden in zijn kas zo aan te passen dat er gemiddeld meer preiplanten opkomen. De standaardafwijking blijft gelijk.

c Bereken wat het nieuwe gemiddelde per zakje moet worden zodat de kans op minder dan 580 opkomende plantjes kleiner is dan 1%. Rond je antwoord af op gehele getallen.

Opgave 13: Gewicht raden

Op de kermis is er een spelletje waarbij je het gewicht moet raden van een zak met kauwgomballen. Je legt € 10,00 in. Als je het gewicht op 0,5 gram nauwkeurig raadt, win je € 50,00. Als je het gewicht op 1 gram nauwkeurig raadt, win je € 25,00. En anders win je niets.

Kyra heeft voorkennis. Ze weet dat één kauwgombal 5 gram weegt, met een standaardafwijking van 0,1 gram. In de zak zitten 55 kauwgomballen en de zak weegt niets.
Bepaal de verwachtingswaarde van de winst van Kyra.

Testen

Opgave 14

In een doos zitten vier kaartjes met daarop de getallen 3, 7, 11 en 15.

a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het getal bij het trekken van één kaartje uit de doos.

b Bereken vanuit de bijbehorende kansverdeling de verwachtingswaarde van de som van de getallen van twee getrokken kaartjes bij trekken met terugleggen. Bereken voor deze som ook de standaardafwijking.

c Welk verband bestaat er met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking die je bij a hebt berekend?

d Bereken vanuit de bijbehorende kansverdeling de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het gemiddelde van de getallen op twee getrokken kaartjes. Welk verband bestaat er nu met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking die je bij a hebt berekend?

e Trek met teruglegging drie kaartjes uit de doos. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som en van het gemiddelde van de getallen op de drie getrokken kaartjes.

Opgave 15

In de maand december zijn er kerstzegels verkrijgbaar. Ze worden in een bepaald jaar aangeboden op een velletje van twee blokken met twee bij vijf zegels. De afmetingen van de blokken (zonder rand) zijn 15,5 bij 7,75 cm met een standaardafwijking van 0,75 mm in beide richtingen.

Bereken de afmetingen en de standaardafwijkingen van deze zegels.

Figuur 2