4.3 Kansvariabelen optellen

Inleiding

Een reistraject bestaat uit een tramreis gevolgd door een busreis. Op beide vervoersmiddelen zul je even moeten wachten voordat ze aankomen: hoe lang zal je wachttijd gemiddeld zijn op dit totale reistraject?

Je kunt dat berekenen met een kansverdeling voor de totale wachttijd. Uit deze kansverdeling volgen regels voor het optellen van beide wachttijden. Dan blijk je de gemiddelde totale wachttijd en de bijbehorende standaardafwijking ook zonder kansverdeling eenvoudig en snel te kunnen berekenen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip som/verschil van twee of meer kansvariabelen;
- regels voor de verwachting en de standaardafwijking van de som en het verschil van onafhankelijke statistische variabelen.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij een statistische variabele;
- verwachting en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Een reiziger gaat heen met de tram en terug met de bus. Op de tram hoeft hij maximaal twee minuten te wachten en op de bus terug maximaal drie minuten. Ga ervan uit dat de wachttijd voor de tram onafhankelijk is van de wachttijd voor de bus.

Voor de wachttijden, in hele minuten, van deze reiziger op de tram (T) en de bus (B) gelden de kansverdelingen hiernaast.

t	0	1	2
$P(T=t)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b	0	1	2	3
$P(B=b)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 1

a Maak een kansverdeling van de totale wachttijd $T+B$ op dit traject.

b Kun je zeggen dat de verwachtingswaarde van $T+B$ gelijk is aan de som van de verwachtingswaarde van T en die van B? En hoe zit dat met de standaardafwijkingen?

Uitleg

Een reiziger gaat heen met de tram en terug met de bus. Op de tram hoeft hij maximaal twee minuten te wachten en op de bus terug maximaal drie minuten. Ga ervan uit dat de wachttijd voor de tram onafhankelijk is van de wachttijd voor de bus.

Voor de wachttijden, in hele minuten, van deze reiziger op de tram (T) en de bus (B) gelden de kansverdelingen hiernaast.

t	0	1	2
$P(T=t)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b	0	1	2	3
$P(B=b)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tabel 2

Bij de totale wachttijd past deze kansverdeling:

$t+b$	0	1	2	3	4	5
$\text{P}(T+B=t+b)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

Tabel 3

Voor het gemiddelde (de verwachting) geldt: $\overline{T}=1$, $\overline{B}=1{,}5$ en $\overline{T+B}=2{,}5$.
Je kunt de gemiddelden optellen.

Maar standaardafwijkingen kun je niet zomaar optellen. Dat komt omdat de standaardafwijking de wortel is uit opgetelde kwadraten van afwijkingen. En kwadraten kun je wel optellen, maar als je dan worteltrekt dan krijg je de wortel uit die kwadraten die je hebt opgeteld.

Omdat $(\sigma(T+B))^2=(\sigma(T))^2+(\sigma(B))^2$ geldt voor de standaardafwijking:

$\sigma(T+B)=\sqrt{(\sigma(T))^2+(\sigma(B))^2}$

Deze optelregels gelden voor zowel discrete als continue variabelen, mits de variabelen onafhankelijk zijn.

Opgave 1

Bekijk de kansverdelingen in de **Uitleg**.

a Beschrijf hoe $\text{P}(T+B=5)$ wordt berekend.

b Welke aanname is bij het berekenen van de kansverdeling van $T+B$ gedaan?

Opgave 2

a Bereken de verwachtingswaarden van T, B en $T+B$ en ga na dat $\overline{T+B}=\overline{T}+\overline{B}$.

b Bereken de standaardafwijkingen van T, B en $T+B$ en ga na dat $\sigma(T+B)=\sqrt{(\sigma(T))^2+(\sigma(B))^2}$.

Opgave 3

Een karamelreep en een kokosreep worden als duo verkocht.
Het gemiddelde gewicht van de karamelreep is 25 gram met een standaardafwijking van 1,1 gram.
Het gemiddelde gewicht van de kokosreep is 55 gram met een standaardafwijking van 1,8 gram.

a Hoeveel bedraagt het gemiddelde gewicht van de twee repen samen? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

b Hoe groot is de kans dat de twee repen samen minder dan 77,5 gram wegen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Vaak heb je met de **som van een aantal kansvariabelen** te maken. Als de kansvariabelen X en Y **onafhankelijk** van elkaar zijn, geldt voor $X+Y$:

- voor het gemiddelde (de verwachting): $\mu(X+Y)=\mu(X)+\mu(Y)$
- voor de standaardafwijking: $\sigma(X+Y)=\sqrt{(\sigma(X))^2+(\sigma(Y))^2}$

Het maakt hierbij niet uit of de variabelen X en Y discreet of continu zijn.

Soms heb je ook met het **verschil van twee onafhankelijke kansvariabelen** X en Y te maken. Dan geldt:

- voor het gemiddelde (de verwachting): $\mu(X-Y)=\mu(X)-\mu(Y)$
- voor de standaardafwijking: $\sigma(X-Y)=\sqrt{(\sigma(X))^2+(\sigma(Y))^2}$

Bijzonder is dat zowel de som als het verschil van meerdere onafhankelijke normaal verdeelde kansvariabelen zelf ook weer een normaal verdeelde kansvariabele is.

Voorbeeld 1

Het gewicht van een zak aardappelen is normaal verdeeld.
Een supermarkt verkoopt zakken aardappelen met verschillende gewichten:

- zakken van 500 gram met een standaardafwijking van 30 gram.
- zakken van 1 kilo met een standaardafwijking van 54 gram.
- zakken van 1,5 kilo met een standaardafwijking van 80 gram.

Voor een aardappelsoufflé is minimaal 1450 gram aardappel nodig, anders stort de soufflé in.
Welke aankoop is de beste keuze: een zak aardappelen van 1,5 kilo of de combinatie van een zak aardappelen van 1 kilo en een zak van 500 gram?

Antwoord

De gewichten van een zak aardappelen van 1500 gram, van 1 kilo en van 500 gram hebben niets met elkaar te maken: de gewichten zijn onafhankelijk van elkaar.

De kans op minstens 1450 gram aardappelen in een zak aardappelen met een gemiddeld gewicht van 1,5 kilo is ongeveer gelijk aan 72%.

De kans op minstens 1450 gram aardappelen bij de combinatie van een zak van 1 kilo en een zak van 500 gram kun je berekenen met behulp van het gemiddelde van de twee zakken samen, C met de bijbehorende standaardafwijking:

$\mu(C) = 1000 + 500 = 1500$ gram en $\sigma(C) = \sqrt{54^2 + 30^2}$.

De gevraagde kans voor deze combinatie blijkt ongeveer 79%.

De combinatie van een zak aardappelen van 1 kilo plus een zak aardappelen van 500 gram is de beste keuze.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Reken zelf de twee percentages in het voorbeeld na.

b Maak met je grafische rekenmachine de normaalkromme van het gewicht van een zak aardappelen van (gemiddeld) 1500 gram en de normaalkromme van toevalsvariabele C, het gewicht van de combinatie van een zak aardappelen van 1 kilo en een zak van 500 gram.

c Bereken de kans op minstens 1450 gram aardappelen in de combinatie van drie zakken aardappelen van elk 500 gram en vergelijk je antwoord met de twee percentages in het voorbeeld.
Welk van de drie mogelijkheden geeft uiteindelijk de grootste kans op minstens 1450 gram aardappelen?

Voorbeeld 2

De diameter M van een bepaald soort moeren is normaal verdeeld met $\mu(M) = 13{,}20$ en $\sigma(M) = 0{,}10$ millimeter.
Bij deze moeren horen bouten waarvan de diameter B ook normaal is verdeeld: $\mu(B) = 13{,}05$ en $\sigma(B) = 0{,}10$ millimeter.
Deze bouten passen nog in de moeren als hun diameter maximaal 0,25 millimeter kleiner is dan die van de moeren.
Hoeveel procent van de bouten past niet?


Figuur 1

Antwoord

Kijk naar het verschil $V = M - B$ van de diameter van een bout en een moer. Dit verschil is ook normaal verdeeld met

- $\mu(V) = \mu(M - B) = \mu(M) - \mu(B) = 13{,}20 - 13{,}05 = 0{,}15$ mm.
- $\sigma(V) = \sigma(M - B) = \sqrt{(\sigma(M))^2 + (\sigma(B))^2} = \sqrt{0{,}10^2 + 0{,}10^2} \approx 0{,}14$ mm.

De bouten passen als $0 \leq V \leq 0{,}25$.
De kans hierop is $\text{P}(0 \leq V \leq 0{,}25 | \mu = 0{,}15 \text{ en } \sigma = 0{,}14) \approx 0{,}62$.
Conclusie: 38% van de bouten past niet in de moeren.

Opgave 5

Gebruik de gegevens van machinaal geproduceerde moeren en bijbehorende bouten uit **Voorbeeld 2**.

a Bereken in vier decimalen de kansen op:

- een bout en een moer die passen.
- een bout en een moer die niet passen.

b Leg uit waarom een bout en een moer passen als $V \leq 0{,}25$.

c Leg uit waarom een bout en een moer niet passen als $V < 0$.

Opgave 6

Het bedrijf in **Voorbeeld 2** produceert meer bouten en moeren in diverse afmetingen.
Voor een ander type bout met bijpassende moer geldt: de diameter van de moer is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,10 millimeter en een standaardafwijking van 0,05 millimeter. De diameter van de bout is normaal verdeeld met een gemiddelde van 8,05 millimeter en een standaardafwijking van 0,03 millimeter.

De bouten passen in de moeren als het verschil van de diameter van de moer en de bout minder dan 0,02 millimeter is.

a Hoeveel procent van deze bouten past niet in de bijbehorende moer?

b Hoeveel procent van deze bouten is te dik voor een moer?

Verwerken

Opgave 7

Elk weekend verkoopt Iris op de markt haar zelfgemaakte sieraden. Gemiddeld is haar weekendomzet € 63,00 met een standaardafwijking van € 2,07. Maar tijdens weekenden met festiviteiten verdient ze gemiddeld € 97,00 met een standaardafwijking van € 2,46.
Wat is de verwachte omzet nadat Iris een gewoon weekend en een feestweekend op de markt heeft gestaan? Welke standaardafwijking hoort daarbij?

Opgave 8

Perry en Kyra doen als duo mee aan een wedstrijd. Zij moeten, ieder voor zich, een atletiekparcours vol hindernissen doorlopen.
Tijdens de trainingen hebben ze hun gegevens bijgehouden. Zo blijkt Perry gemiddeld 11,5 minuten over dit parcours te doen, met een standaardafwijking van 0,8 minuten. Kyra doet er gemiddeld 10,5 minuten over, maar haar standaardafwijking is 1 minuut.

Ga ervan uit dat de parcourstijden van Perry en Kyra normaal verdeeld zijn.

a Hoe groot is de kans dat Perry en Kyra in deze wedstrijd als duo tussen de 20 en de 21 minuten scoren?

b Hoe groot is de kans dat Perry tijdens deze wedstrijd meer dan 1 minuut sneller is dan Kyra?

Opgave 9

Bas zit in een kunstklas en is bezig met een 39 meter lange draadfiguur van ijzerdraad en koperdraad. Bij de bouwmarkt koopt hij van beide metalen een rol draad. De lengte van een rol metaaldraad is normaal verdeeld.

Een rol koperdraad is gemiddeld 10 meter lang, met een standaardafwijking van 9 centimeter. Een rol ijzerdraad is gemiddeld 30 meter lang en heeft een standaardafwijking van 13 centimeter.

a Wat is de te verwachten totale lengte van de door Bas gekochte rollen ijzer- en koperdraad samen? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

De kans dat Bas minder dan de benodigde 39 meter draad heeft gekocht, zal heel klein zijn.

b Laat zien dat deze kans inderdaad bijzonder klein is.

Opgave 10

Bekijk de twee kansverdelingen op basis van klassenmiddens. De statistische variabelen (kansvariabelen) X en Y zijn onafhankelijk van elkaar.

x	1	2		y	5	10	15
$P(X = x)$	0,15	0,85		$P(Y = y)$	0,25	0,40	0,35

Tabel 4

Laat zien dat:

a $\overline{X+Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

b $\sigma(X+Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$

c $\overline{Y-X} = \overline{Y} - \overline{X}$

d $\sigma(Y-X) = \sqrt{(\sigma(Y))^2 + (\sigma(X))^2}$

Opgave 11

Het paard is, samen met de koe ons zwaarste huisdier. Deze opgave gaat over paarden van twee verschillende rassen: de arabier en het Friese paard.

Een arabier weegt gemiddeld 450 kilo met een standaardafwijking van 50 kilo. Een Fries paard weegt gemiddeld 600 kilo met een standaardafwijking van 85 kilo.

Omdat er op paardenstoeterijen steeds meer machinaal wordt gewerkt en paarden daardoor in en op machines staan, is hun gewicht alleen daarom al van belang voor paardenfokkers en -trainers.

a Hoe groot is de kans dat een willekeurige arabier en een willekeurig Fries paard samen meer dan 1200 kilo wegen?

b Hoe groot is de kans dat de gewichten van een willekeurige arabier en een willekeurig Fries paard minder dan 75 kilo van elkaar verschillen?

c Hoe groot is de kans dat in een groep van acht willekeurige Friese paarden er minstens één is die minder weegt dan een gemiddelde arabier?

Toepassen

Opgave 12: Gegevens van leerlingen

Gebruik het bestand **Gegevens 154 leerlingen**. Bekijk de tabel met gegevens van 154 meisjes en jongens.

a Onderzoek in hoeverre de lichaamslengte van de meisjes en de lichaamslengte van de jongens (bij benadering) normaal verdeeld zijn.

Ga ervan uit dat de lichaamslengtes van deze meisjes en jongens normaal verdeeld zijn met de gemiddelden en standaardafwijkingen zoals je die in a hebt berekend.

b Hoeveel procent van de jongens is langer dan het gemiddelde meisje in deze groep?

c Wat is de kans dat een willekeurige jongen uit deze groep langer is dan een willekeurig meisje uit deze groep?

Opgave 13: Schoonmaakmiddelen

Een fabrikant van schoonmaakmiddelen heeft één filiaal in Nederland, speciaal voor de Nederlandse markt. De afzet van dit Nederlandse filiaal blijkt jaar in jaar uit heel stabiel met een gemiddelde van 24850 liter. De kans op een jaar waarin er meer dan 25000 liter schoonmaakmiddel wordt besteld is slechts 8%, zo heeft de administratieve afdeling berekend.

De afzet wisselt per kwartaal; de kwartaalafzetten zijn volgens de administratieve afdeling onafhankelijk van elkaar. Zowel in het eerste als in het vierde kwartaal van een jaar wordt gemiddeld 6250 liter afgezet met een standaardafwijking van 61 liter. Maar in het tweede kwartaal wordt ieder jaar duidelijk meer schoonmaakmiddel afgenomen en in het derde kwartaal juist veel minder. De administratieve afdeling heeft ondertussen ook kunnen achterhalen dat er in het derde kwartaal jaarlijks gemiddeld 5625 liter wordt besteld met een standaardafwijking van 52 liter.

Hoeveel schoonmaakmiddel wordt er jaarlijks gemiddeld in het tweede kwartaal afgenomen en met welke standaardafwijking?

Testen

Opgave 14

Literpakken melk worden machinaal gevuld. Zo'n pak heeft een inhoud die normaal is verdeeld met een gemiddelde van 1,010 liter en een standaardafwijking van 0,006 liter. De vulmachine staat ingesteld op het gieten van gemiddeld 1,005 liter melk in zo'n pak met een standaardafwijking van 0,004 liter. Ook dit vulvolume is normaal verdeeld.

a In hoeveel procent van de gevallen gaat bij het vullen melk verloren?

b Het gemiddelde vulvolume kan worden ingesteld. Hoeveel moet dit bedragen opdat in niet meer dan 1% van de gevallen melk verloren gaat bij het vullen van een pak?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.