4.2 Normale verdelingen

Inleiding

Bij heel veel continue toevalsvariabelen blijkt een mooie symmetrische klokvormige kromme te horen. Dat geldt voor het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, e.d.
De beroemde wiskundige Gauss (1777—1855) vond er een formule voor. Sinds die tijd spreek je van een 'Gausskromme' of ook wel 'normaalkromme'. Het vulgewicht van pakken suiker is bijvoorbeeld ongeveer normaal verdeeld.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- een normale kans berekenen;
- een grenswaarde berekenen bij een gegeven linker- of rechtergrens, kans, gemiddelde en standaardafwijking;
- het gemiddelde of de standaardafwijking van een normale kansvariabele berekenen.

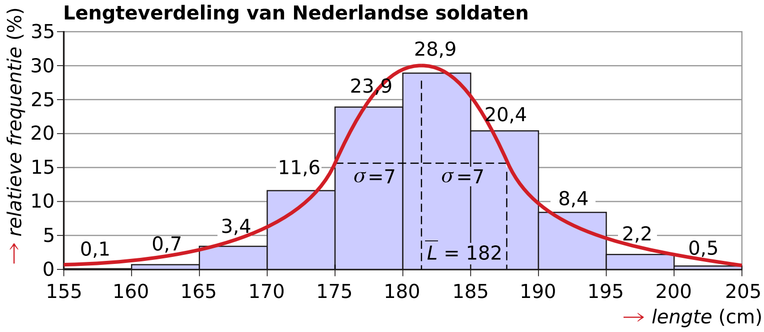
Voorkennis

- het begrip continue kansvariabele;
- de normaalkromme;
- de vuistregels voor de normaalkromme gebruiken;
- kansrekenen.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de lengteverdeling van een groep soldaten op een bepaalde kazerne.



Figuur 2

Bij de lengte L hoort een normaalkromme met gemiddelde $\mu(L) = 182$ en standaardafwijking $\sigma(L) = 7$ cm.

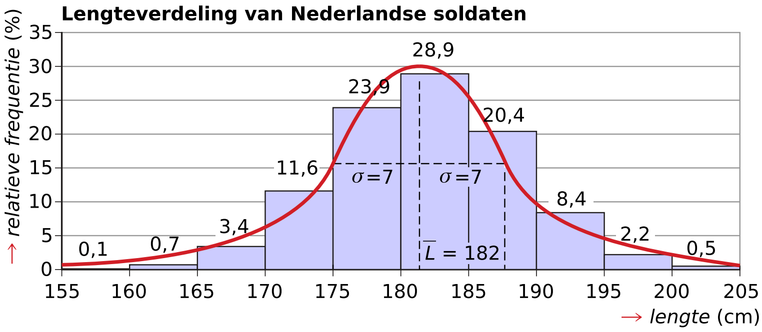
a Wat stelt $P(L < 175)$ in dit voorbeeld voor?

b Waarom kun je deze kans uit de figuur gemakkelijk berekenen maar $P(L < 171)$ veel minder makkelijk?

c Wat kun je zeggen van $P(L = 175)$?

Uitleg

Bekijk de figuur met de lengteverdeling van een groep soldaten op een kazerne. Bij de lengte L (cm) hoort een normaalkromme met een gemiddelde van 182 centimeter en een standaardafwijking van 7 centimeter. Anders gezegd: L is een normaal verdeelde kansvariabele.



Figuur 3

Bedenk wel dat de gegevens van de soldaten op hele lengtes zijn afgerond. Als je vraagt naar het percentage soldaten met een lengte van 180 centimeter, dan moet je goed afspreken wat je bedoelt: precies 180 centimeter, of afgerond 180 centimeter.

Vanaf nu hanteer je de afspraak dat je bij normale verdelingen geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk is dat dit moet. Dit betekent dat: $\text{P}(162 < L < 178) = \text{P}(162 \leq L < 178) = \text{P}(162 < L \leq 178) = \text{P}(162 \leq L \leq 178)$ als L normaal verdeeld is.

De 'normale kans' dat een soldaat van deze kazerne tussen de grenswaarden 165 en 180 centimeter lang is, gegeven dat $\mu(L) = 182$ en $\sigma(L) = 7$, noteer je als:
$\text{P}(165 \leq L < 180 | \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$

| betekent: 'gegeven dat'.

In de figuur is dit het gebied onder de normaalkromme tussen de linkergrenswaarde $L = 165$ en de rechtergrenswaarde $L = 180$. Je hebt de grafische rekenmachine of Excel nodig om dergelijke kansen te kunnen berekenen: de vuistregels zijn te beperkt.
Bekijk het **Practicum**.

Opgave 1

Bekijk het histogram van de lengteverdeling van de soldaten in de **Uitleg**.

a Hoeveel is $\text{P}(165 \leq L < 180)$ volgens het histogram? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

b Bepaal $\text{P}(165 \leq L < 180 | \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$ met de grafische rekenmachine.

c Bereken de kans dat een soldaat tussen 166 en 177 centimeter lang is.

d Bereken hoeveel procent van de soldaten kleiner dan 166 centimeter is.

e Bereken hoeveel procent van de soldaten langer dan 192 centimeter is.

Opgave 2

Bekijk de lengteverdeling van de soldaten in de **Uitleg**.

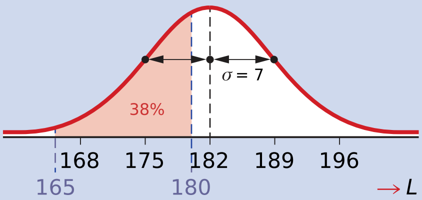
a Controleer de vuistregels met behulp van de grafische rekenmachine.

b Hoeveel procent van de soldaten heeft volgens de normaalkromme een lengte die minder dan drie standaardafwijkingen van het gemiddelde afwijkt?
Noteer je antwoord met één decimaal.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet



Figuur 4

Continue kansvariabelen zoals het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, en dergelijke zijn vaak **normaal verdeeld**. Je spreekt dan van een **normale kansvariabele** of **normale statistische variabele**.

De wiskundige Gauss (1777—1855) vond een formule voor de grafiek van de bijpassende normaalkromme of gausskromme. In de grafische rekenmachine is de formule voor die normaalkromme geprogrammeerd. Daarmee kun je de normaalkromme schetsen en de bijbehorende kansen berekenen, ook als die niet met de vuistregels zijn te bepalen.

De kans die wordt weergegeven door de gekleurde oppervlakte noteer je als:
$\text{P}(165 \leq L < 180 | \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$
| betekent: 'gegeven dat'.

Omdat $\text{P}(L = 165) = 0$ is die kans hetzelfde als $\text{P}(165 < L < 180)$.

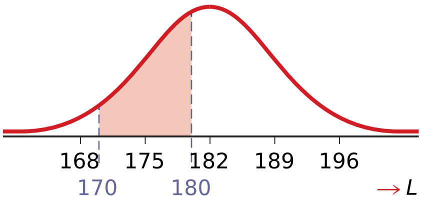
Als je wilt berekenen wat de kans is dat iemand afgerond een lengte heeft van 165 centimeter, dan moet je $\text{P}(164{,}5 < X < 165{,}5)$ berekenen.

Hanteer de afspraak dat je bij een normale verdeling geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk in de vraagstelling naar voren komt dat dit moet.

Hoe je dit op de grafische rekenmachine of in Excel invoert, zie je in het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

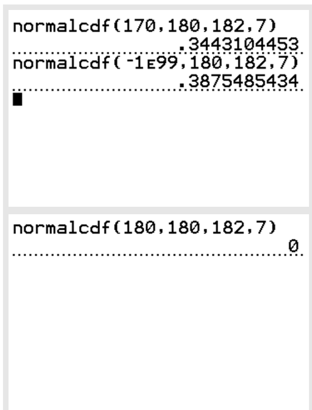


Figuur 5

De lengte L van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 182$ centimeter en een standaardafwijking van $\sigma = 7$ centimeter.

Bereken $\text{P}(170 < L < 180)$, $\text{P}(L < 180)$, $\text{P}(L = 180)$ en bereken het percentage soldaten dat langer is dan 1,75 meter.

Antwoord



Figuur 6

Al deze kansen zijn met de grafische rekenmachine te vinden.
Bekijk het **Practicum**.

- $\text{P}(170 < L < 180) \approx 0{,}3443$
- $\text{P}(L < 180) \approx 0{,}3875$
- $\text{P}(L = 180) = 0$
- 'Bereken het percentage soldaten dat langer is dan 1,75 meter' kun je vertalen naar:
  $\text{P}(L > 175 | \mu = 182 \text{ en } \sigma = 7) \approx 0{,}8413$. Dat is gelijk aan ongeveer 84,13%.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Wat betekent $P(162 < L < 178)$ in dit verband?

b Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte tussen 171 en 178 centimeter?

c Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte van precies 171 centimeter?

d Hoeveel procent van de soldaten van deze kazerne heeft een lengte vanaf $\mu - 1{,}5 \cdot \sigma$ tot $\mu + 1{,}5 \cdot \sigma$?

Opgave 4

Bioloog Peter Adriaanse heeft van 1000 koolwitjes de spanwijdte van de vleugels gemeten. Hij vond dat deze spanwijdte ongeveer normaal is verdeeld met een gemiddelde van 5,2 centimeter en een standaardafwijking van 0,8 centimeter.

Figuur 7

a Hoeveel procent van de gemeten koolwitjes had een spanwijdte van meer dan 6 centimeter?

b Hoeveel van de gemeten koolwitjes hadden een spanwijdte tussen de 5 en de 6 centimeter?

c Hoe groot is de kans op een koolwitje met een spanwijdte van minstens 6,5 centimeter?

Opgave 5

Het gewicht G van een bepaalde appelsoort is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram en een standaardafwijking van 17 gram.

a Hoe groot is de kans dat een appel van deze soort minder dan 140 gram weegt?

b Hoeveel procent van deze appels heeft een gewicht dat minder dan 10 gram afwijkt van het gemiddelde?

Een groenteboer heeft nog 340 van deze appels.

c Hoeveel daarvan zijn lichter dan 120 gram?

Een klant koopt een zak met vijf appels van de groenteboer.

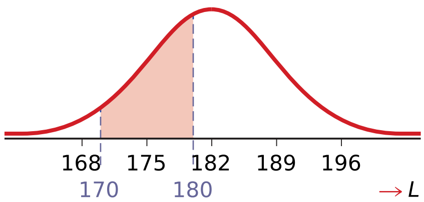
d Wat is de kans dat minstens vier appels lichter zijn dan 120 gram?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Normale verdeling

De lengte L van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu(L) = 182$ cm en een standaardafwijking van $\sigma(L) = 7$ cm.

Welke lengtes hebben de 20% langste soldaten in deze groep?



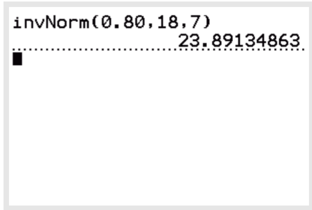
Figuur 8

Antwoord

Vertaal deze vraag in: bereken grenswaarde g als $P(L > g) = 0{,}20$.

De grafische rekenmachine heeft hiervoor een speciale functie. Die stelt je in staat om vanuit een gegeven kans de grenswaarde terug te vinden. Alleen is die functie ingesteld op 'kleiner-of-gelijk'-kansen.

Omdat $\text{P}(L > g) = 0{,}20$ betekent dat $\text{P}(L < g) = 1 - \text{P}(L > g) = 0{,}80$ kun je die functie hier toch gebruiken.
De uitkomst is: $g = 187{,}9$.
De 20% langste soldaten zijn 187,9 cm of langer.



Figuur 9

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Welke lengtes hebben de 20% kleinste soldaten in deze groep?

b 10% van de soldaten zit boven het gemiddelde, maar is toch niet langer dan a centimeter. Bereken a.

Opgave 7

Ga uit van de normaal verdeelde lengtes van de soldaten. De gemiddelde lengte is 182 centimeter en de standaardafwijking is 7. Men besluit voor deze 1200 soldaten T-shirts aan te schaffen in drie maten: S (small), M (medium) en L (large). Deze maten worden zo gemaakt dat elke maat precies voor $\frac{1}{3}$ deel van de soldaten geschikt is.

a Voor welke lengtes is maat S geschikt?

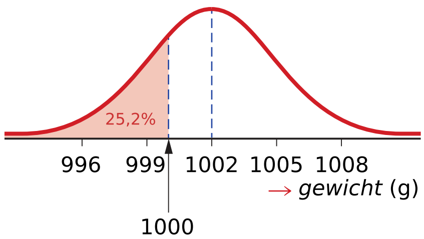
b Voor welke lengtes is maat M geschikt?

Voorbeeld 3

In een suikerfabriek is het vulgewicht van kilopakken suiker ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar ongeveer 25% van de pakken bevat minder dan 1000 gram.
De fabrikant wil dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat.
Hij kan dit bijvoorbeeld bewerkstelligen door het gemiddelde vulgewicht μ te verhogen, maar dat is een te dure oplossing.
De fabrikant kan dit ook voor elkaar krijgen door de vulmachine nauwkeuriger te laten werken: hij verkleint de standaardafwijking σ.

Bekijk de applet.

Hoe bereken je de aangepaste μ of σ?



Figuur 10

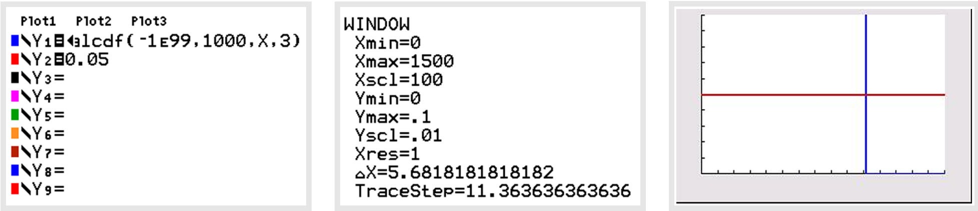
Antwoord

De toevalsvariabele X is het gewicht van een pak suiker uit de suikerfabriek.

Los op:
$\text{P}(X < 1000 | \mu = x \text{ en } \sigma = 3) = 0{,}05$ voor de aanpassing van het gemiddelde of
$\text{P}(X < 1000 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = x) = 0{,}05$ voor de aanpassing van de standaardafwijking.

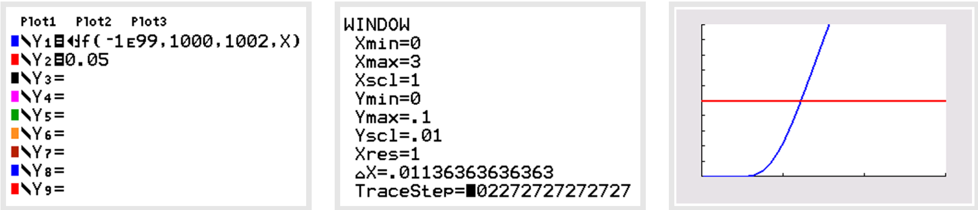
Om te zien hoe je dit doet, bekijk je het **Practicum**.

Voor y_1 voer je de uitdrukking links van het isgelijkteken in, met de variabele x als gemiddelde of als standaardafwijking. De horizontale lijn is de lijn $y_2 = 0{,}05$.



Figuur 11

Als de standaardafwijking gelijk blijft (3 gram), dan moet het gemiddelde toenemen van 1002 gram naar 1004,9 gram om aan de nieuwe eis te kunnen voldoen.



Figuur 12

Als het gemiddelde gelijk blijft (1002 gram), dan moet de standaardafwijking afnemen van 3 gram naar 1,22 gram om aan de nieuwe eis te kunnen voldoen.

Opgave 8

Gebruik de gegevens van de suikerfabriek in **Voorbeeld 3**.

a Waarom is dit voor de fabrikant een dure oplossing?

b Wat verandert er aan de normaalkromme van de suikerpakken en wat blijft er gelijk als het gemiddelde vulgewicht groter wordt?

c Bereken met de grafische rekenmachine in drie decimalen na wat de nieuwe standaardafwijking moet worden als niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram mag bevatten.

d Welke mogelijke voor- en nadelen heeft deze oplossing voor de fabrikant?

e Wat verandert er aan de normaalkromme van de suikerpakken en wat blijft er gelijk als de standaardafwijking van het vulgewicht kleiner wordt?

Opgave 9

a De eisen worden aangescherpt: niet meer dan 2,5% van de pakken suiker mag minder dan 1000 gram wegen. Welk gemiddeld vulgewicht moet je dan hanteren?

b Is het mogelijk om te eisen dat 0% van de pakken te licht is? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 10

Bereken de volgende kansen. Rond af op vier decimalen.

a $\text{P}(L < 174 | \mu(L) = 178 \text{ en } \sigma(L) = 5)$

b $\text{P}(3 < X < 5 | \mu(X) = 4{,}3 \text{ en } \sigma(X) = 1{,}2)$

c $\text{P}(Y > 1200 | \mu(Y) = 1180 \text{ en } \sigma(Y) = 113)$

Opgave 11

Een vulmachine vult kilopakken rijst. Het ingestelde vulgewicht van de machine komt overeen met het gemiddelde gewicht van de pakken rijst. De gewichten zijn normaal verdeeld. Het gemiddelde gewicht van een pak rijst is 1010 gram en de standaardafwijking is 9 gram.

a Hoeveel procent van de pakken weegt minder dan 1000 gram?

b Hoeveel procent van de pakken weegt meer dan 1000 gram?

c Hoe groot is de kans op een pak dat meer dan 5 gram te zwaar is?

d Hoeveel procent van de pakken is meer dan 20 gram te licht?

e Hoe groot is de kans op een pak dat tussen de 1005 en de 1015 gram weegt?

Opgave 12

Een bakker bakt kerststollen van 1000 gram.

a Hoeveel bedraagt de standaardafwijking als het gemiddelde gewicht 1000 gram is en 5% van de stollen minder weegt dan 900 gram?

b Als de standaardafwijking van de stollen 60 gram is, hoeveel procent van de stollen weegt dan minder dan 900 gram?

c Hoe groot is het gemiddelde gewicht van de stollen bij een standaardafwijking van 65 gram als 5% van de stollen minder weegt dan 900 gram?

d Hoe groot is het gewicht van de 3% zwaarste kerststollen als het gemiddelde gewicht 1000 gram is en de standaardafwijking 62,5 gram?

Opgave 13

Bij de serieproductie van een bepaald type auto wordt het plaatsen van het stuur door mensen gedaan. Deze handeling kost gemiddeld 55 seconden. De handelingstijd T blijkt ongeveer normaal te zijn verdeeld rond dit gemiddelde met een standaardafwijking van 4 seconden.

Er worden in een bepaalde maand 1200 van deze auto's geproduceerd.

a Schat het aantal auto's waarbij het langer dan 60 seconden heeft geduurd om het stuur te plaatsen.

b Hoeveel tijd hebben de 3% snelste handelingstijden gekost?

De fabrikant van deze auto's onderzoekt of een machine de mens kan vervangen. De gemiddelde afhandelingstijd is dan ook 55 seconden, maar de standaardafwijking wordt veel kleiner. Nu duurt maar 1% van alle afhandelingstijden meer dan 60 seconden.

c Welke standaardafwijking geldt voor deze machine?

Opgave 14

Twee hardlopers op de 400 meter trainen samen. Op basis van vele wedstrijden gaat de trainer uit van een normaal verdeeld snelheidsverschil tussen deze twee van gemiddeld 0 m/s met een standaardafwijking van 0,205 m/s.
De laatste zes wedstrijden die deze twee hardlopers samen hebben gelopen, geven de volgende snelheden.

loper A	9,2	9,2	8,8	8,9	8,8	8,5
loper B	9,2	9,0	9,0	8,9	8,7	9,1

Tabel 1

Zoals je uit de gegevens kunt afleiden, bleef het snelheidsverschil bij de eerste vijf wedstrijden binnen een marge van één standaardafwijking rondom het gemiddelde snelheidsverschil, uitgaande van de eerder beschreven normale verdeling van het snelheidsverschil.

a Bereken de procentuele kans dat bij vijf wedstrijden achter elkaar het snelheidsverschil beperkt blijft tot maximaal één standaardafwijking rondom het gemiddelde snelheidsverschil. Kan dit een reden voor de trainer zijn om te twijfelen aan de juistheid van het normaal verdeelde model voor het snelheidsverschil?

De laatste van de zes wedstrijden springt eruit met een groot verschil in snelheid.

b Bereken de procentuele kans op minimaal een dergelijk snelheidsverschil, uitgaande van de eerder beschreven normale verdeling van het snelheidsverschil. Kan dit een reden voor de trainer zijn om te twijfelen aan de juistheid van het normaal verdeelde model voor het snelheidsverschil?

c Vergelijk het gemiddelde snelheidsverschil en de bijbehorende standaardafwijking van de gekozen normale verdeling en die van de gegevens van de zes wedstrijden met elkaar en leg uit wat dit voor de hardlopers kan betekenen.

Gebruik daarbij in ieder geval:

- een schets met beide normaalkrommen boven één horizontale as van snelheidsverschillen;
- het verschil in de kans op een groter snelheidsverschil dan 0,6 m/s.

De trainer past vanwege de uitkomsten van de laatste zes wedstrijden de standaardafwijking van de gekozen normale verdeling aan: zij wil daarmee haar (voorspellings)model beter laten aansluiten op de werkelijkheid. Ze blijft ervan uitgaan dat de beide hardlopers gemiddeld even snel zijn, maar de standaardafwijking kiest zij zo, dat de kans op een snelheidsverschil dat groter is dan 0,6 m/s maximaal vier procent is.

d Bereken de nieuwe standaardafwijking in drie decimalen.

Opgave 15

De accu van een tablet van het merk Sampel gaat gemiddeld 2,60 jaar mee met een standaard-afwijking van 0,32 jaar. De tableteigenaars zijn hiermee niet tevreden en daarom wil Sampel de productiestraat van deze accu's aanpassen.
Er zijn aanpassingen mogelijk die de gemiddelde levensduur zullen verhogen: per extra levensweek zijn de kosten hiervan € 0,01 per tablet.
Andere aanpassingen zorgen voor een kleinere standaardafwijking, maar deze aanpassingen kosten per extra levensweek € 0,02 per tablet.

Sampel wil de productiestraat zodanig aanpassen dat de kans dat de accu meer dan twee jaar meegaat minstens 97,5% wordt. Echter: de totale extra kosten per tablet door de aanpassingen mogen niet hoger zijn dan 1,4 eurocent.

Onderzoek of er mogelijkheden zijn voor Sampel om de productiestraat zodanig aan te passen dat aan beide voorwaarden wordt voldaan.

Toepassen

Opgave 16: Kniehoogtes van 5001 vrouwen

Open het bestand **Enkele lichaamsafmetingen van 5001 vrouwen uit 1947**.
Hierin zie je een tabel met kniehoogtes in cm van de 5001 vrouwen uit het onderzoek in 1947 van Freudenthal en Sittig in opdracht van De Bijenkorf.

a Bereken met Excel (of een ander statistiekprogramma) de gemiddelde kniehoogte en de standaard-deviatie.

b Teken een histogram en benader dit met een normaalkromme. Lukt dit in jouw ogen goed genoeg om aan te nemen dat K, de kniehoogte van de vrouwen, normaal verdeeld is?

Neem aan dat de kniehoogte K van de vrouwen inderdaad normaal is verdeeld met de eerder berekende waarden voor het gemiddelde μ en de standaarddeviatie σ.

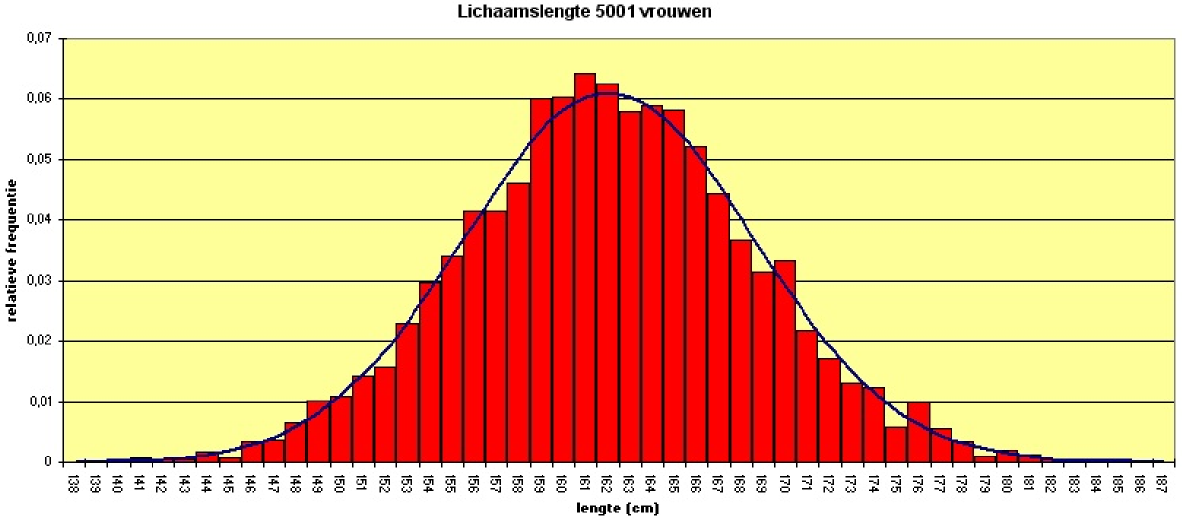
c 90% van de kniehoogtes zit tussen $\mu - a$ en $\mu + a$. Hoe groot is a?

Rond af op één decimaal.

d Welke minimale lengte hebben de 20% grootste kniehoogtes?

Opgave 17: Lengtes van 5001 vrouwen

Volgens het onderzoek van Freudenthal en Sittig uit 1947 waren de lengtes van vrouwen die bij de Bijenkorf winkelden normaal verdeeld met een gemiddelde van 162 cm en een standaarddeviatie van 6,5 cm. Ga bij het beantwoorden van de onderstaande vragen steeds uit van die normale verdeling als model voor de lichaamslengte van deze 5001 vrouwen.



Figuur 13

a Hoeveel procent van deze vrouwen was langer dan 170 cm?

b Hoeveel procent van deze vrouwen had een lengte tussen 160 en 170 cm?

c Hoe groot is de kans dat een vrouw die je toen bij de Bijenkorf tegen kon komen 160 cm lang was? (Neem aan dat alle lengtes op gehele cm zijn afgerond.)

d Hoe lang waren de 10% kleinste vrouwen?

e En hoe lang waren de 10% langste vrouwen?

Opgave 18: Zwangerschap

In het ‘Moeders voor moeders babyboek’ staat dat 75% van de zwangere vrouwen bevalt tussen 14 dagen vóór en 14 dagen na de uitgerekende datum. Bij het bepalen van deze uitgerekende datum gaat men uit van een zwangerschap van 40 weken. De zwangerschapsduur is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 280 dagen.

Met behulp van deze gegevens kun je berekenen dat de bijbehorende standaardafwijking, afgerond op één decimaal, gelijk is aan 12,2 dagen.

In 2002 vonden er in Nederland 199205 bevallingen plaats. Van een aantal van deze bevallingen duurde de zwangerschap minder dan 36 weken.

a Bereken bij hoeveel bevallingen dit het geval was.

De standaardafwijking kan nauwkeuriger worden bepaald.

b Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen.

(naar: examen VWO wiskunde A 1,2 uit 2005, 2e tijdvak)

Testen

Opgave 19

Een zakje Cup-a-soup moet 17 g bevatten. Het gewicht van zakjes is normaal verdeeld. De vulmachine is zo ingesteld dat het vulgewicht 19 g bedraagt met een standaardafwijking van 1,5 g. Het vulgewicht komt overeen met het gemiddelde gewicht.

a Hoe groot is de kans dat een zakje minder dan 17 g weegt?

b Hoe groot is de kans dat een zakje Cup-a-Soup meer dan 17 g weegt?

c Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn hoogst?

d Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn minst?

Figuur 14

Opgave 20

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

a Hoeveel mannen hebben een bloeddruk die meer dan drie keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?

b Hoeveel procent van de mannen heeft een bloeddruk van meer dan 150?

c Hoeveel bedraagt de bloeddruk van de 10% mannen met de hoogste bloeddruk?

Opgave 21

Het vulvolume V van een pak melk is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,02 liter en een standaardafwijking van 0,015 liter. De consument verwacht 1 liter melk te kopen.

a Hoeveel procent van de melkpakken bevat minder dan 1 liter melk?

Het percentage dat je bij a hebt gevonden, wordt door de supermarkt die deze pakken verkoopt als te hoog bevonden. De supermarkt verlangt van de fabrikant dat het vulvolume wordt verhoogd, totdat maximaal 1% van de pakken minder dan 1 liter melk bevat.

b Bereken het vulvolume dat de fabrikant dan moet instellen. Geef het antwoord in milliliter nauwkeurig

Practicum

Met de volgende practica kun je zien hoe je normale kansen berekent met de **grafische rekenmachine**. Doe alleen de onderdelen die betrekking hebben op de normale verdeling.

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio fx-CG50**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

Maar je kunt ook heel goed normale kansen berekenen met behulp van **Excel**. Bekijk daartoe het practicum:

- **Normale verdeling**