2.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Kansrekenen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- experimentele kans — theoretische kans
- vaasmodel — kansboom — trekking met/zonder teruglegging
- kansexperiment — uitkomstenverzameling, gebeurtenis — elkaar wederzijds uitsluitende gebeurtenissen
- algemene productregel voor kansen — (on)afhankelijke gebeurtenissen — voorwaardelijke kans
- toevalsvariabele — kansverdeling — verwachtingswaarde — afhankelijkheid van toevalsvariabelen
- ja/nee-kansen, binomiale kansen — binomiale kansverdeling — de verwachtingswaarde van een binomiale kansverdeling

Activiteitenlijst

- kansen berekenen m.b.v. systematisch tellen en/of frequentietabellen — simulatie
- kansen berekenen m.b.v. kansbomen — het vaasmodel gebruiken
- kansen berekenen met de optelregel
- kansen berekenen de productregel
- een kansverdeling maken — de verwachtingswaarde berekenen — kansen berekenen waarin het gaat om minstens of hoogstens een bepaald aantal — afhankelijkheid van toevalsvariabelen door berekening vaststellen
- binomiale kansen berekenen en een binomiale kansverdeling opstellen — de verwachtingswaarde van een binomiale kansverdeling berekenen

Achtergronden

In het midden van de zeventiende eeuw is de kansrekening ontstaan in een briefwisseling van de twee grote Franse wiskundigen **Pierre de Fermat** (1601—1665) en **Blaise Pascal** (1623—1662).

Halverwege de zeventiende eeuw kreeg Pascal het onderstaande kansprobleem voorgelegd door de Franse edelman (en verwoed gokker) Chevalier de Méré.

> De Méré speelde in de Franse ‘salons’ vaak een dobbelspel waarbij de ‘bank’ won als een speler bij het werpen met één zuivere dobbelsteen bij 4 worpen tenminste één zes gooit. Hij bedacht daarop een variant waarbij de bank wint wanneer bij 24 worpen met twee zuivere dobbelstenen tenminste één keer dubbel-zes voorkwam. De Méré dacht dat er bij beide situaties voor de bank dezelfde kans op winst bestond: in het eerste geval 4/6 en in het tweede geval 24/36 (want bij twee dobbelstenen zijn er 36 mogelijkheden), en dat is beide hetzelfde. In de praktijk bleek dit echter niet op te gaan, de tweede situatie was voor de bank ongunstig. De vraag was hoe dat kwam.

Pascal stortte zich op deze problemen en in een briefwisseling met Pierre de Fermat (1601—1665) losten zij ze op. Daarbij ontwikkelden ze de **basisprincipes van de kansrekening**. In feite zijn Pascal en Fermat de grondleggers van de kansrekening zoals wij die tegenwoordig nog steeds beoefenen. Zij werkten echter met kansen in termen van verhoudingen als 1 : 6 en niet (zoals wij tegenwoordig doen) met breuken.

Het eerste echte leerboek over kansrekening is echter geschreven door de Nederlandse geleerde **Christiaan Huygens** (1629—1695). In zijn 'Van Rekeningh in Spelen van Geluck' introduceerde Huygens het vaasmodel met zwarte en witte schijven, zoals bij het damspel. Allerlei vraagstukken uit de kansrekening herleidde hij tot dat vaasmodel.

Later schreef de Franse wiskundige **Abraham de Moivre** (1667—1754), die sinds 1685 in Londen woonde en een goede vriend was van Isaac Newton, zijn beroemde 'The Doctrine of Chance', waarin hij de basisbegrippen van de kansrekening voortzette naar een theorie over kansverdelingen.

De moderne opbouw van de kansrekening is van betrekkelijk recente datum. De Russische wiskundige **Andrej Kolmogorov** (1903—1987) zorgde voor een precieze wiskundige theorie.

Figuur 1

Testen

Opgave 1

Vertaal de volgende situaties in een vaasmodel en bereken de kans.

a Bij de presidentsverkiezingen in de Verenigde Staten in 2000 ging de verkiezingsstrijd tussen de presidentskandidaten Al Gore en George Bush. Gore had op zeker moment ongeveer 40% van de kiezers achter zich en Bush ook. De overige kiesgerechtigde Amerikanen zouden niet gaan stemmen. Je komt vier toeristen uit de Verenigde Staten tegen. Hoe groot is de kans dat ze op dat moment alle vier op Gore zouden stemmen?

b Bij een gevaarlijke reddingsoperatie moeten drie vrijwilligers een brandend gebouw in. Er zijn twee brandweerkorpsen uitgerukt: korps A met tien leden en korps B met vijftien leden. Alle leden van de brandweerkorpsen melden zich als vrijwilliger. De drie vrijwilligers worden door het lot aangewezen. Hoe groot is de kans dat ze alle drie bij korps A horen?

c Je gooit met drie gewone dobbelstenen. Wat is de kans op een som van vijftien ogen?

d Je bent je pincode vergeten. Die pincode bestaat uit vier cijfers en alle mogelijkheden zijn toegestaan. Je wilt geld uit de geldautomaat halen. Je toetst zomaar een pincode in. Hoe groot is de kans dat het de juiste is?

Opgave 2

In een vaas zitten twintig balletjes, tien rode, vijf blauwe en vijf gele. Uit die vaas worden aselect drie balletjes tegelijk gehaald.

a Maak een kansboom bij deze situatie.

b Hoe groot is de kans dat er twee rode en één blauw balletje worden getrokken?

c Hoe groot is de kans op één balletje van elke kleur?

d Hoeveel rode balletjes verwacht je?

Opgave 3

Bij de entree van de overdekte kinderspeelplaats Chimpie Champ krijg je een kaart. Er zijn zes verschillende kaarten. Als je vier dezelfde hebt, mag je een keer gratis naar binnen.

Bas mag in de zomervakantie vijf keer naar Chimpie Champ en hij vraagt zich af of hij de vijfde keer gratis naar binnen kan.

Figuur 2

a Beschrijf de kans die je moet berekenen om Bas iets uitgebreider antwoord te kunnen geven dan alleen 'ja, er is een manier waarop dat kan'.

b Beschrijf een manier om het bijbehorende kansexperiment te simuleren.

Na correcte en veelvuldige simulatie van dit kansexperiment denkt Bas dat de kans dat hij de vijfde keer gratis naar binnen mag, gelijk is aan 2,5%.

c Bereken de daadwerkelijke kans dat Bas de vijfde keer gratis naar binnen kan.

d Leg uit hoe een correcte en veelvuldige simulatie toch zo'n afwijkende kans kan opleveren.

Opgave 4

Voor het uitvoeren van een bepaald experiment zijn vijf vrouwelijke en vijf mannelijke proefpersonen gevraagd. De helft van hen doet een bepaalde test met een zeker hulpmiddel en de andere helft (de controlegroep) doet diezelfde test zonder dat hulpmiddel. Door loting wordt vastgesteld wie terechtkomt in groep A die het hulpmiddel mag gebruiken. Het aantal mannen M in groep A hangt dus van het toeval af.

a Maak voor M een kansverdeling en bereken het te verwachten aantal mannen.

b Hoe groot is de kans dat er hoogstens drie mannen in groep A zitten?

Opgave 5

In een zeker gebied in Afrika beschikt 60% van de bewoners over goed drinkwater. 8% van de bewoners heeft een bepaalde darmparasiet; van hen heeft slechts 1 op de 4 goed drinkwater.

a Hoe groot is de kans dat een willekeurige bewoner goed drinkwater en toch die darmparasiet heeft?

b Hoe groot is de kans dat een willekeurige bewoner goed drinkwater en niet die darmparasiet heeft?

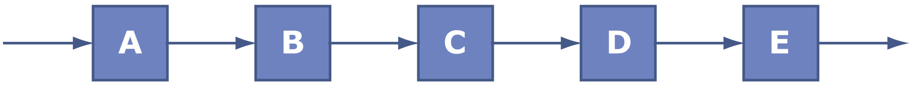
c Hoe groot is de kans dat een willekeurige bewoner goed drinkwater of niet die darmparasiet heeft?

d De kans dat een bewoner met goed drinkwater die parasiet heeft, zal kleiner zijn dan de kans dat een bewoner zonder goed drinkwater die parasiet heeft. Hoe groot zijn die kansen in procenten?

e Zijn de toevalsvariabelen K, de kwaliteit van drinkwater, en P, het wel of niet hebben van een darmparasiet, wel of niet afhankelijk van elkaar? Beantwoord deze vraag met een berekening.

Opgave 6

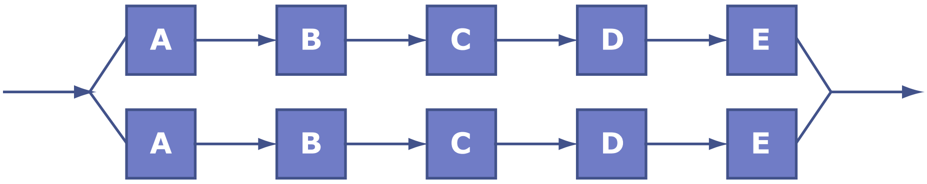
Bij een ingewikkeld apparaat is vaak een keten van onderdelen nodig om het geheel te laten functioneren. Daarbij is de betrouwbaarheid van een keten (zoals in de figuur) kleiner dan de betrouwbaarheid van de afzonderlijke delen. Dat komt doordat het uitvallen van één onderdeel het uitvallen van de gehele keten tot gevolg heeft. Bekijk een keten van vijf onderdelen (A, B, C, D, E), die elk een kans van 10% hebben om uit te vallen, ofwel elk een betrouwbaarheid hebben van 90%.



Figuur 3

a Laat zien dat de betrouwbaarheid van deze keten ongeveer 60% is.

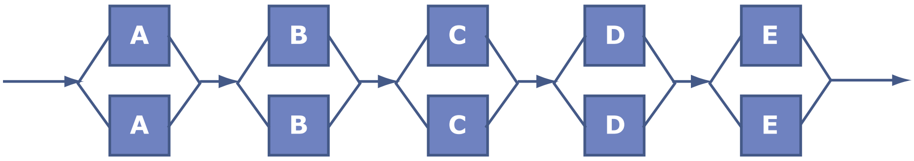
Men kan de betrouwbaarheid vergroten door naast de keten van deze figuur nog zo'n keten te schakelen (zie de volgende figuur). Dit heeft het voordeel dat als één keten uitvalt het systeem toch blijft functioneren.



Figuur 4

b Bereken de betrouwbaarheid van dit systeem.

Een nog beter systeem krijgt men door de 10 onderdelen zo te schakelen als de volgende figuur aangeeft. Elk van de tien onderdelen heeft weer een betrouwbaarheid van 90%.



Figuur 5

c Bereken de betrouwbaarheid van dit laatste systeem.

(bron: examen havo wiskunde A in 1991, eerste tijdvak)

Opgave 7

Bij een gezondheidsenquête, uitgevoerd door het Centraal Bureau voor de Statistiek, waren vragen opgenomen over linkshandigheid. Van linkshandige meisjes en jongens in de leeftijd van 10-20 jaar is nagegaan hoe het zit met de links- of rechtshandigheid van de ouders. Het resultaat hiervan staat in de tabel.

CBS	één van de ouders of beide ouders linkshandig	beide ouders rechtshandig
aantal meisjes linkshandig	32	72
aantal jongens linkshandig	40	96

Tabel 1

Een linkshandige jongen en een linkshandig meisje (uit die leeftijdscategorie) beginnen een relatie. Na verloop van tijd maken de ouders van beide kinderen kennis met elkaar. Die ouders blijken alle vier rechtshandig te zijn.
Hoe groot is de kans daarop?

(bron: examen havo wiskunde A in 1991, eerste tijdvak)

Opgave 8

Het vak statistiek wordt op een bepaalde faculteit afgesloten met een tentamen en eventueel een hertentamen. Op basis van resultaten uit de afgelopen jaren is bekend dat 55% van de studenten uiteindelijk (na een eventueel hertentamen) een voldoende haalt voor dit vak. Van de studenten die gedurende de collegeperiode regelmatig opgaven geoefend hebben, haalt 80% uiteindelijk een voldoende voor dit vak. Het percentage studenten dat regelmatig oefent, wordt geschat op 35%.

Iemand beweert dat oefenen voor statistiek weinig zin heeft.

a Wordt de bewering door deze gegevens ondersteund?

b Hoeveel procent van de studenten die uiteindelijk een voldoende hebben voor statistiek, heeft regelmatig geoefend?

Opgave 9

In een vaas zitten 13 knikkers: 8 paarse en 5 gele.

Je pakt 6 keer een knikker uit de vaas, controleert de kleur en legt hem weer terug in de vaas.

a Hoe groot is de kans dat je minder dan 4 gele knikkers hebt gepakt?

b Hoe groot is de kans dat je minstens 4 paarse knikkers hebt gepakt?

c Hoeveel paarse knikkers verwacht je te pakken?

Toepassen

Opgave 10: Chuck-a-luck

‘Chuck-a-luck’ is een kansspel waarbij wordt geworpen met drie dobbelstenen. Het wordt in veel casino's gespeeld. Een casino is vooral geïnteresseerd in de verwachtingswaarde, veel spelers denken alleen aan hun kansen (sukkels...).

Bij dit spel kies je een bepaalde uitkomst voor het aantal ogen op één dobbelsteen. Komt jouw aantal bij een worp met drie stenen één keer voor krijg je de inleg terug, komt het twee keer voor krijg je je inleg twee keer terug en komt het drie keer voor dan krijg je je inleg 10 keer terug.

Stel je voor dat W je winstbedrag is. Per ingelegde euro heeft W de waarden -1, 0, 1 en 9. Met behulp van een kansboom maak je daarbij een kansverdeling en bereken je de verwachtingswaarde. Vooral die verwachtingswaarde is interessant voor een casino: het is het gemiddelde bedrag dat ze per ingelegde euro moeten uitbetalen.

Figuur 6

a Stel een bij dit spel passende kansverdeling op.

b Bereken de bijbehorende verwachtingswaarde.

c Wat adviseer je een casino dat dit spel wil invoeren?

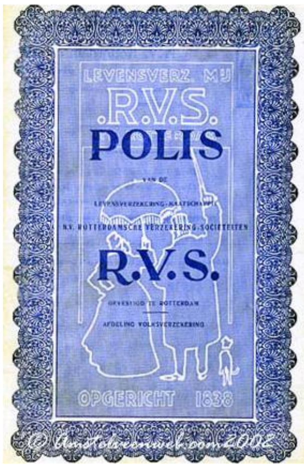
Opgave 11: Sterftetabellen

Verzekeringsmaatschappijen gebruiken veel kansrekening. Bij het afsluiten van een levensverzekering willen verzekeraars weten wat de kans is dat de verzekerde binnen een bepaalde tijd overlijdt. Daarbij wordt gebruik gemaakt van tabellen zoals deze **sterftetabel**.

Deze tabellen zijn gebaseerd op statistisch onderzoek en worden van tijd tot tijd bijgesteld.

Je ziet in deze tabel bijvoorbeeld dat van elke 10.000.000 geboren mannen er na 35 jaar nog 9.804.341 in leven zijn. Na 50 jaar zijn dat er nog 9.545.529. De kans dat iemand van 35 jaar oud 50 jaar wordt is dan: $\frac{9.545.529}{9.804.341} \cdot 100\% \approx 97{,}4\%$.

Zo kun je ook zijn kans bepalen dat hij 70 jaar wordt, en 71 jaar, etc. En daarmee bereken je zijn levensverwachting en weet de verzekeringsmaatschappij hoeveel jaar er gemiddeld aan iemand van 35 jaar oud nog moet worden uitbetaald vanaf het moment dat zijn levensverzekering tot uitkering komt.



Figuur 7

a Hoeveel procent van de mensen die de leeftijd van 25 jaar hebben bereikt, sterven voor hun dertigste?

b Hoeveel procent van de mensen die 60 jaar worden, sterven voor hun zeventigste?

c Gebruik nog eens de gegeven sterftetabel. Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat iemand die 50 jaar wordt, ook nog zijn zeventigste verjaardag zal halen.

d Bereken ook de kans dat iemand die 50 jaar wordt, binnen 20 jaar zal sterven.

e Bereken de levensverwachting van een vijftigjarige man met behulp van deze tabel in Excel.

Stel je een levensverzekering voor waarbij je het verzekerde bedrag in één keer krijgt uitbetaald wanneer je op de afgesproken datum nog in leven bent. Je betaalt de premie in één keer op het moment dat je de levensverzekering afsluit. Stel je voor dat je op 30-jarige leeftijd zo'n levensverzekering afsluit met als verzekerd bedrag € 100.000,00. Dit bedrag wordt uitgekeerd op het moment dat je 65 jaar wordt en nog in leven bent. De premie kan echter lager zijn dan € 100.000,00. Anders kun je immers beter zelf het geld op de bank zetten!

f Waarom is dat zo?

g Hoe hoog zou die premie moeten zijn op grond van de gegeven tabel? Licht je antwoord toe, houd rekening met overlevingskansen en rentestand.

Examen

Opgave 12: Wijn proeven

Bij het examen voor vinoloog (wijnkenner) moeten de kandidaten wijnen herkennen door te proeven. Uit een artikel komt de volgende tekst.

> De examenkandidaten hebben zich een jaar lang op deze proeverij voorbereid. Het zijn bijna allemaal vaklui: restauranteigenaren, wijnproevers, slijters. De opdracht lijkt simpel: combineer de 12 op papier genoemde wijnen met het juiste glas. Om te slagen wordt genoegen genomen met 9 juiste combinaties. Dat dit in de praktijk een hels karwei is, blijkt wel uit het geringe aantal kandidaten dat succesvol is: gemiddeld zo'n 30 procent.

In deze opgave kijken we naar de kans dat iemand die helemaal geen verstand van wijnen heeft het examen haalt. Omdat hij uitsluitend gokt, noemen we hem een gokker.
Er staan, volgens bovenstaande tekst, 12 glazen met wijn op tafel. Iedere deelnemer krijgt 12 kaartjes met de namen van die wijnen. De opdracht is: leg bij elk glas het goede kaartje. De gokker legt zijn kaartjes dus in willekeurige volgorde bij de verschillende glazen.

a Op hoeveel verschillende manieren kan de gokker de kaartjes neerleggen?

Om het iets gemakkelijker te maken, heeft de examencommissie de 12 wijnen in 4 groepjes van 3 verdeeld. Bij elk groepje liggen 3 kaartjes met de namen van die 3 wijnen. De opdracht van de kandidaat is om bij elk groepje de kaartjes bij het juiste glas te leggen.

b Stel een kansverdeling op van het aantal door de gokker goed neergelegde kaartjes per groepje van 3.

In deze tabel zie je een mogelijk verloop van het examen. De 'route' 3 – 1 – 0 – 3 levert in totaal 7 goed geraden wijnen.

	eerste drietal	tweede drietal	derde drietal	vierde drietal
aantal goed neergelegde kaartjes	0	0	0	0
	1	1	1	1
	3	3	3	3

Tabel 2

Om te slagen moeten er minstens 9 wijnen goed geraden worden.

c Bereken de kans dat een gokker slaagt.

(bron: voorbeeldexamen wiskunde A1,2 vwo 2001)

Opgave 13: Vierkeuzevragen

Bij vierkeuzevragen staan bij elke vraag vier mogelijke antwoorden: A, B, C en D. Slechts één daarvan is juist. Een kandidaat kan één van de vier antwoorden kiezen of de vraag onbeantwoord laten. Bij keuze van het juiste antwoord wordt 1 punt toegekend, in alle andere gevallen 0 punten. Als een kandidaat absoluut niet weet welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn, doet hij er daarom verstandig aan om toch een antwoord te kiezen. Dit leidt tot gokgedrag.
Daarom is ook wel eens geopperd om bij een onjuist antwoord strafpunten te geven. Een kandidaat heeft dan twee keuzes: niets invullen levert 0 punten op; wel iets invullen levert 1 punt op bij een juist antwoord en - 0,5 punt (0,5 strafpunt) bij een onjuist antwoord.

a Bereken de verwachtingswaarde van de score per vraag bij dit strafpuntensysteem als een kandidaat gokt.

We kijken nu naar een andere manier van toetsen met vierkeuzevragen. Hierbij hoeft de kandidaat niet meer één antwoord te kiezen. In plaats daarvan vraagt men de kandidaat achter elk van de vier mogelijke antwoorden A, B, C en D de subjectieve kans op te schrijven.
Een kandidaat die bijvoorbeeld noteert $p_A = 0{,}2$; $p_B = 0{,}8$; $p_C = 0$; $p_D = 0$ geeft daarmee aan dat hij er vrij zeker van is dat B juist is, maar dat A ook nog zou kunnen, en dat C en D volgens hem zeker fout zijn. De opgeschreven getallen p_A, p_B, p_C en p_D mogen natuurlijk niet negatief zijn en moeten bij elkaar opgeteld 1 zijn.
Bij iedere vraag wordt een score berekend die aangeeft 'hoe dicht je bij het juiste antwoord zit'.
Als bijvoorbeeld C het juiste antwoord is, dan wordt de score berekend met de volgende formule:

$\text{score} = 1 - \left(p_A^2 + p_B^2 + (1 - p_C)^2 + p_D^2\right)$.

Voor de gevallen waarbij A, B of D het juiste antwoord is, gelden soortgelijke formules. De maximale score is 1 en de minimale score is - 1.
Bij een bepaalde vraag is het juiste antwoord B. Een kandidaat die niet helemaal zeker van zijn zaak is, noteert bij deze vraag als subjectieve kansen: $p_A = 0{,}2$; $p_B = 0{,}7$; $p_C = 0$; $p_D = 0{,}1$.

b Bereken de score voor deze kandidaat bij deze vraag.

Stel dat bij een andere vraag C het juiste antwoord is. Een kandidaat haalt bij deze vraag de minimale score.

c Welke subjectieve kansen kan de kandidaat opgeschreven hebben achter de antwoorden A, B, C en D? Vermeld alle mogelijkheden.

Een kandidaat moet een vraag beantwoorden maar heeft geen idee welk antwoord juist is en welke antwoorden onjuist zijn. Er zijn heel veel mogelijkheden voor de kandidaat om die vraag te beantwoorden:

- Mogelijkheid I:
  De kandidaat zou kunnen gokken op een antwoord door daar 1 achter te schrijven (en dus 0 achter de andere antwoorden). Het antwoord waarbij de kandidaat 1 heeft gezet, kan goed zijn. Dan is de score 1. Als het niet goed is, is de score - 1. De verwachte score is dan: $\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot -1 = -0{,}5$.
- Mogelijkheid II:
  Hij kan ook op twee antwoorden gokken door achter ieder van die twee antwoorden $\frac{1}{2}$ te schrijven.
- Mogelijkheid III:
  Hij kan ook op drie antwoorden gokken door achter ieder van die drie antwoorden $\frac{1}{3}$ te schrijven.
- Mogelijkheid IV:
  En tenslotte kan hij ook op alle vier de antwoorden gokken door achter alle antwoorden $\frac{1}{4}$ te schrijven. Deze laatste mogelijkheid levert hem een score van 0,25 op.

Er zijn nog veel meer mogelijkheden om de vraag te beantwoorden. We kijken echter alleen naar de bovengenoemde vier mogelijkheden. De score bij mogelijkheid IV is hoger dan de verwachte score bij mogelijkheid I. Mogelijkheid IV is daarmee een 'verstandiger' strategie dan mogelijkheid I.

d Onderzoek welk van de mogelijkheden II, III en IV de meest verstandige strategie is.

We vergelijken de antwoorden van twee personen op een vierkeuzevraag. Tim snapt niets van de vraag en besluit bij ieder antwoord 0,25 in te vullen. Tom weet zeker dat de antwoorden B en D onjuist zijn. Zijn antwoord op deze vraag zal de vorm hebben die je in de tabel ziet. Hierbij is a een getal tussen 0 en 1 (eventueel 0 of 1).

antwoord	subjectieve kans
A	a
B	0
C	$1 - a$
D	0

Tabel 3

Stel dat antwoord C juist is. Of Tom bij deze vraag een hogere score haalt dan Tim hangt af van de gekozen waarde van a.

e Bereken voor welke waarden van a geldt dat Tom bij deze vraag een hogere score haalt dan Tim.

(bron: examen wiskunde A1,2 vwo 2004, eerste tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.