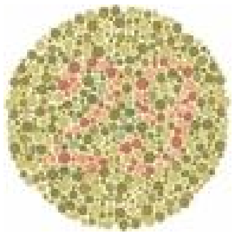
2.6 Binomiale kansen

Inleiding

Plaatjes zoals dit worden gebruikt om te onderzoeken of iemand kleurenblind is. Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen en 0,4% van de westerse vrouwen. Via de website **www.kleurenblindheid.nl** kun je er meer over te weten komen. Of iemand kleurenblind is kun je niet aan zijn uiterlijk zien, dus je kunt je bijvoorbeeld afvragen hoe groot de kans is dat er kleurenblinden in jouw klas zitten. En hoeveel je er dan verwacht...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip Bernoulli-experiment;
- rekenen met binomiale kansen;
- binomiale toevalsvariabelen (stochasten) en de bijbehorende verwachtingswaarde berekenen.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij toevalsvariabelen (stochasten);
- verwachting bij een kansverdeling berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Lees de tekst van de Inleiding nog eens.

a Hoe groot is de kans dat in een klas van de 10 jongens er 2 kleurenblind zijn?

b Hoe groot is de kans dat in een klas van 10 jongens en 15 meisjes 2 leerlingen kleurenblind zijn?

c Hoeveel kleurenblinden verwacht je in zo'n klas?

Uitleg

Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen. Of iemand kleurenblind is kun je niet aan zijn uiterlijk zien, dus iedere westerse man die je tegenkomt (en verder niet kent) heeft voor jou een kans van 0,08 om kleurenblind te zijn. Vraag je een willekeurige westerse man of hij kleurenblind is of niet, dan doe je een kansexperiment met precies twee uitkomsten: 0 als hij niet kleurenblind is en 1 als dit wel het geval is. Zo'n kansexperiment heet een Bernoulli-experiment naar de Zwitserse wiskundige Jakob Bernoulli (1654—1705). De bijbehorende kansverdeling is:

x	0	1
$\text{P}(X = x)$	0,92	0,08

Tabel 1

Vraag je 10 westerse mannen naar kleurenblindheid dan voer je het Bernoulli-experiment 10 keer uit: je herhaalt 10 keer hetzelfde experiment. De bijbehorende stochast is K en de kans dat er 2 kleurenblinden bij zijn is: $\text{P}(K = 2) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8 \cdot \binom{10}{2}$ waarin $\binom{10}{2}$ het aantal mogelijke combinaties van 2 uit 10 voorstelt. Dit getal is het aantal mogelijke takken in de bijbehorende kansboom van 10 lagen met 2 kleurenblinden en 8 niet-kleurenblinden.

Een complete kansverdeling van K ziet er zo uit:

- $\text{P}(K = 0) = 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{10} \cdot \binom{10}{0}$
- $\text{P}(K = 1) = 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^{9} \cdot \binom{10}{1}$
- $\text{P}(K = 2) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^{8} \cdot \binom{10}{2}$
- ...
- $\text{P}(K = 10) = 0{,}08^{10} \cdot 0{,}92^{0} \cdot \binom{10}{10}$

Bij deze kansverdeling is de verwachting eenvoudig te berekenen: $\text{E}(K) = 10 \cdot 0{,}08 = 0{,}8$.
Hierin is de E (van ‘expectation’) het symbool voor de verwachtingswaarde.

Opgave 1

Bekijk de toevalsvariabele X in de **Uitleg**.

a Laat zien, dat $\text{E}(X) = 0{,}08$.

b Leg uit waarom K de som van 10 onafhankelijke Bernoulli-experimenten is.

c Bereken $\text{P}(K = 4)$.

d Bereken de verwachtingswaarde van K met behulp van de kansverdeling en laat zien dat er inderdaad 0,8 uitkomt. Beschrijf de betekenis van dit getal.

Opgave 2

Je werpt met twee dobbelstenen en bepaalt na de worp de som van het aantal bovenliggende ogen. De toevalsvariabele X geeft aan of het aantal ogen zeven is of niet:

- $X = 0$ betekent dat je geen zeven ogen gooit;
- $X = 1$ betekent dat je zeven ogen gooit.

a Stel een kansverdeling van X op.

b Bereken de verwachtingswaarde van X.

Je gooit nu twaalf keer met twee dobbelstenen. Je let op het aantal keer A dat je zeven ogen gooit.

c Hoe groot is de kans dat je drie keer zeven ogen gooit, dus hoe groot is $\text{P}(A = 3)$?

d Bereken de verwachtingswaarde van A.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **Bernoulli-experiment** is een kansexperiment met precies twee uitkomsten: ‘succes’ of ‘mislukking’. Daarbij hoort een stochast B die de waarden 0 en 1 heeft en daarom zo'n kansverdeling:

b	0	1
$\text{P}(B = b)$	$1 - p$	p

Tabel 2

Als je een Bernoulli-experiment n keer herhaalt en stochast X stelt het aantal successen daarbij voor, dan heeft X een **binomiale kansverdeling**. Een binomiaal kansexperiment bestaat dus uit n gelijke onafhankelijke experimenten met elk precies twee uitkomsten. De kans op k successen is

$$\text{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Ook nu is p de kans op succes en verder is $0 \leq k \leq n$. De variabelen n en p noem je de **parameters** van de binomiale verdeling.

Van een binomiaal verdeelde stochast met parameters n en p is de **verwachtingswaarde** $\text{E}(X) = n \cdot p$.
Hierin is de E (van ‘expectation’) het symbool voor de verwachtingswaarde.

Voorbeeld 1

Je gooit met 10 dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat er 4 zessen boven komen te liggen? En hoe groot is de kans dat er hoogstens 4 zessen boven komen te liggen?

Antwoord

Het aantal zessen dat boven komt is een binomiale stochast X met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$. De gevraagde kans is:

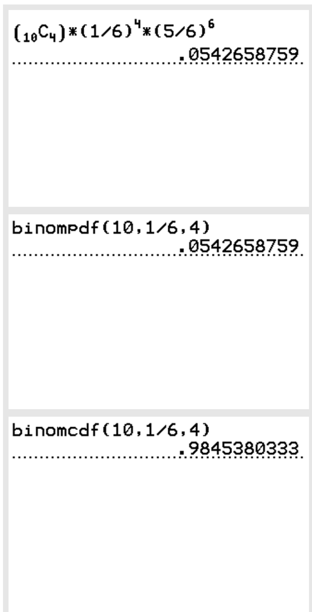
$\text{P}\left(X = 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$. Je kunt deze kans zelf berekenen:

$$\text{P}\left(X = 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \binom{10}{4} \approx 0{,}0543.$$

De grafische rekenmachine kan deze kans ook in één keer voor je berekenen.

Dat is zeker handig als je de kans op hoogstens 4 zessen wilt weten. Want in plaats van de kansen voor $X = 0,1,2,3$ en 4 afzonderlijk te berekenen en dan op te tellen, kan de GR dit in één keer.

De kans op hoogstens 4 zessen is: $\text{P}\left(X \leq 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}9845$.



Figuur 2

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt met tien dobbelstenen geworpen en let je op het aantal zessen X dat boven komt. Bekijk eerst in het **Practicum** hoe je binomiale kansen berekent met je grafische rekenmachine.

a Waarom is X een binomiale stochast?

b Bereken $\text{P}(X = 6)$. Bereken deze kans met de hand en met behulp van de grafische rekenmachine.

c Bereken de kans dat er hoogstens 6 zessen boven komen te liggen.

Opgave 4

Een stochast X is binomiaal verdeeld. Bereken de volgende kansen in vier decimalen nauwkeurig.

a $\mathrm{P}(X \leq 10 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}14)$

b $\mathrm{P}(X < 10 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}14)$

c $\mathrm{P}(X \geq 10 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}14)$

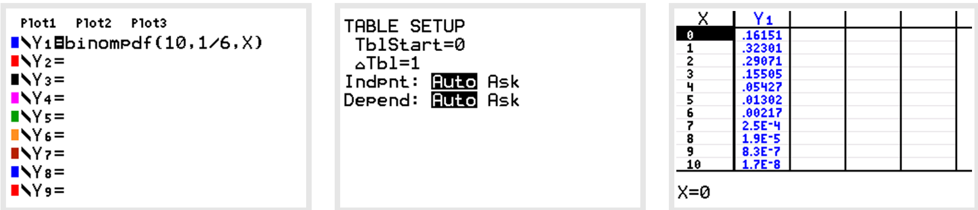
d $\mathrm{P}(4 \leq X \leq 10 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}14)$

Voorbeeld 2

Je gooit met 10 dobbelstenen. Stochast X geeft het aantal zessen aan dat boven komt te liggen. Stel een kansverdeling op voor X en bereken de verwachtingswaarde.

Antwoord

X is een binomiale stochast met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$. Je moet nu de kansen bepalen voor $X = 0,1,2,3,...,10$. Het gaat om kansen van de vorm $\mathrm{P}\left(X = x | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$. Voer je dit in de grafische rekenmachine in als functie, dan maakt hij de bijbehorende tabel met uitkomsten. De GR maakt dus deze kansverdeling voor je.



Figuur 3

De verwachtingswaarde is $\mathrm{E}(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{6} = 2\frac{2}{3}$ zessen.

Opgave 5

Bekijk hoe in **Voorbeeld 2** een kansverdeling wordt gemaakt met de grafische rekenmachine.

a Maak zelf de kansverdeling uit het voorbeeld.

b Reken de verwachtingswaarde van stochast X na met behulp van de kansverdeling.

Je kunt ook een lijst maken van kansen van de vorm $\mathrm{P}\left(X \leq x | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$.

c Doe dat en bepaal daarmee de waarden van x waarvoor deze kans groter is dan 0,7.

Voorbeeld 3

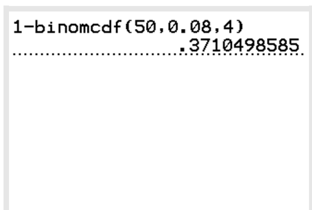
Uit onderzoek blijkt dat 8% van de westerse mannen kleurenblind is. Je vraagt 50 willekeurig gekozen westerse mannen of ze kleurenblind zijn. Hoeveel kleurenblinde mannen verwacht je in jouw steekproef aan te treffen? Hoe groot is de kans dat je meer dan vier kleurenblinde mannen in je steekproef aantreft?

Antwoord

Stel stochast K is het aantal kleurenblinde mannen in de steekproef. K is binomiaal verdeeld met parameters $n = 50$ en $p = 0{,}08$.

De verwachtingswaarde is: $\mathrm{E}(K) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}08 = 4$ mannen.

De kans op $X > 4$ kun je zo opschrijven: $\mathrm{P}(K > 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08)$.
Deze kans is gelijk aan: $1 - \mathrm{P}(K \leq 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08)$.



Figuur 4

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** worden de kansen berekend dat in een groep van 50 mannen er een bepaald aantal kleurenblind is.

a Bereken de kans op precies 6 kleurenblinden in de groep van 50.

b Bereken de kans op hoogstens 6 kleurenblinden in de groep van 50.

c Bereken de kans op minstens 6 kleurenblinden in de groep van 50.

Opgave 7

Een aantal mensen wordt ieder jaar ingeënt tegen griep. Van een bepaalde entstof weet men dat acht van de tien mensen geen griep krijgen. Een huisarts vaccineert vier patiënten A, B, C en D met deze entstof.

a Hoeveel patiënten zullen naar verwachting geen griep krijgen?

b Bepaal de kans dat geen van de vier patiënten griep krijgt.

c Bepaal de kans dat de patiënten A en B geen griep krijgen en C en D wel.

d Bepaal de kans dat twee van de vier patiënten griep krijgen.

e Bepaal de kans dat hoogstens twee van de vier patiënten griep krijgen.

Opgave 8

Er wordt 30 keer met een zuivere dobbelsteen gegooid. Bereken de kans dat er:

a Precies 5 keer een zes wordt geworpen.

b Bij alle worpen een oneven aantal ogen boven komt.

c Bij precies 10 worpen een 1 of 2 boven komt.

Verwerken

Opgave 9

Een volledig kaartspel bestaat uit 52 kaarten, van elke kleur (ruiten, harten, klaveren en schoppen) evenveel. Uit zo'n kaartspel wordt zes keer een kaart getrokken: er wordt gekeken of het een hartenkaart is of niet. De kaart die je trekt wordt steeds in het spel terugstopt alvorens een nieuwe kaart te nemen. Het spel kaarten wordt voor iedere trekking geschud.

a Waarom is hier sprake van een binomiaal kansmodel?

b Hoe groot is dan de kans op hoogstens drie hartenkaarten?

c Hoe groot is de kans dat je meer dan drie hartenkaarten trekt?

d Waarom is er geen sprake van een binomiaal kansmodel als je de getrokken kaarten niet teruglegt?

Opgave 10

Iemand vult bij een meerkeuzetoets volkomen willekeurig 32 keer een van de vier antwoordmogelijkheden in. Er is telkens maar één van deze keuzemogelijkheden juist. De toets wordt met een voldoende beoordeeld als er meer dan 22 vragen juist zijn ingevuld.

a Bepaal het aantal verwachte correcte antwoorden van de gokker.

b Bepaal de kans dat de gokker toch een voldoende haalt.

Opgave 11

Neem aan dat stochast X binomiaal verdeeld is. Bepaal onderstaande kansen in vier decimalen nauwkeurig.

a $\text{P}(X \leq 6 | n = 20 \text{ en } p = 0{,}45)$

b $\text{P}(X > 8 | n = 15 \text{ en } p = 0{,}35)$

c $\text{P}(X \geq 46 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}55)$

d $\text{P}(X \leq 5|n = 25 \text{ en } p = 0{,}25)$

e $\text{P}(X < 16|n = 30 \text{ en } p = 0{,}45)$

Opgave 12

In een doos bevindt zich een zeer groot aantal kralen. 40% van deze kralen is rood en de rest zwart. Je haalt hier aselect en met terugleggen 10 kralen uit. Stochast X is het aantal rode kralen.

a Waarom past bij X een binomiaal kansmodel?

b Leg uit hoe je de volgende kansen berekent:

- $\text{P}(X \leq 7)$
- $\text{P}(X < 7)$
- $\text{P}(X > 7)$
- $\text{P}(4 \leq X \leq 7)$

Opgave 13

Je werpt met een geldstuk dat niet geheel eerlijk is. De kans op munt is 0,45. Je werpt 20 keer met dit geldstuk. Bereken de kans op:

a precies vijf keer kruis;

b niet meer dan vijf keer kruis;

c meer dan vijf keer kruis;

d minder dan vijf keer kruis;

e zeven of acht keer kruis.

Opgave 14

X is een binomiaal verdeelde toevalsvariabele. Voor welke waarde van x geldt:

a $\text{P}(X \leq x|n = 100 \text{ en } p = 0{,}35) = 0{,}1236$

b $\text{P}\left(X > x|n = 12 \text{ en } p = \frac{1}{3}\right) < 0{,}1777$

Toepassen

Opgave 15: Meerkeuzetoets

Een meerkeuzetoets bestaat uit 50 vragen, elk met vier mogelijke antwoorden, waarvan er slechts één juist is.

De docente die deze toets heeft gemaakt wil de normering ervan vaststellen. De cijfers worden tot op één decimaal nauwkeurig berekend; het laagst mogelijke cijfer is 1,0 en het hoogst mogelijke 10,0. Zij wil bij het vaststellen van het cijfer het gokken van antwoorden zo min mogelijk belonen.

a Ze zou er daartoe voor kunnen kiezen om het aantal verwachte goede antwoorden bij zuiver gokken niet te belonen. Verder werkt ze met een vast aantal punten per vraag.

Welke normering zou ze dan het best kunnen hanteren?

b Zij kan ook besluiten dat bij willekeurig invullen de kans op het cijfer 4,0 of hoger bij benadering niet meer dan 3% mag zijn. Voor hoeveel goede antwoorden wordt dan het cijfer 4,0 gegeven?

c Is de tweede methode soepeler dan de eerste? Licht je antwoord toe.

d Stel je voor dat je op 30 vragen zonder meer het antwoord weet en de rest gokt. Bereken bij elk van deze normeringen het cijfer dat je dan mag verwachten.

Ga er nu van uit dat er een zuiver lineaire puntenverdeling wordt gehanteerd:

- bij 0 tot 5 vragen goed krijg je een 1,0;
- bij 6 vragen goed krijg je een 1,2;
- bij 7 vragen goed krijg je een 1,4;
- enzovoorts;
- bij 50 vragen goed een 10,0.

e Je weet op 30 vragen het goede antwoord en besluit de rest van de vragen op goed geluk in te vullen. Welk cijfer kun je verwachten?

f Bereken de kans dat je 7,6 of meer scoort.

g Bij n zeker goede antwoorden en de overige vragen willekeurig invullen is de kans op minstens 7,0 groter dan 90%. Bereken n.

Testen

Opgave 16

Een test bestaat uit 15 vierkeuzevragen. Slechts bij 5 van deze vragen kun je met zekerheid het goede antwoord aangeven. Je besluit de 10 andere vragen op goed geluk een antwoord aan te geven.

a Hoe groot is de kans dat je 12 vragen van de test het goede antwoord hebt gegeven?

b Hoe groot is de kans dat je meer dan 5 vragen goed beantwoordt?

c Hoeveel vragen van de test mag je verwachten goed te beantwoorden?

Opgave 17

In het casino mag je voor € 10,00 met tien zuivere dobbelstenen werpen. Voor iedere dobbelsteen waar je minder dan 4 ogen mee gooit krijg je € 2,00 uitbetaald.

Hoe groot is de kans dat je winst maakt bij dit spel?

Practicum

Met de volgende practica kun je **het werken met kansverdelingen op de grafische rekenmachine** doornemen. Vooralsnog heb je alleen de binomiale kansverdeling nodig, alleen de eerste drie onderdelen van het gewenste practicum.

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio fx-CG50**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.