5.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Toepassen van formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- recht evenredig, omgekeerd evenredig — lineair verband, hyperbolisch verband — lineair interpoleren, extrapoleren
- combineren en herleiden van formules
- karakteristieken van functies — rekenmodel — rijen, met name rekenkundige en meetkundige
- verandering, toenamediagram, gemiddelde helling — afgeleide en helling in een bepaald punt

Activiteitenlijst

- herkennen of sprake is van een recht evenredig, een omgekeerd evenredig, een lineair, of een hyperbolisch verband met formules van de genoemde verbanden rekenen en de eigenschappen van de bijbehorende functies gebruiken — lineair interpoleren en extrapoleren
- formules herleiden en combineren: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, bij elkaar invullen
- karakteristieken van functies bepalen door redeneren en met behulp van de grafische rekenmachine — werken met rekenmodellen in toepassingen — werken met rekenmodellen met gehele stapgrootte, met rijen dus
- toenamediagrammen maken en gebruiken om toename te beschrijven, gemiddelde helling berekenen — afgeleide bepalen met behulp van differentiëren en helling in een bepaald punt berekenen en interpreteren, hellingsgrafieken maken en interpreteren

Achtergronden

Bij het toepassen van formules gaat het om het werken met rekenmodellen. Deze rekenmodellen ontstaan door modelleren. Modelleren is in feite een heel breed begrip: het wordt gebruikt om het op schaal bouwen van voorwerpen, het tekenen van objecten met de computer, het ontwerpen van rekenmodellen voor allerlei processen, enzovoorts, aan te duiden.

Testen

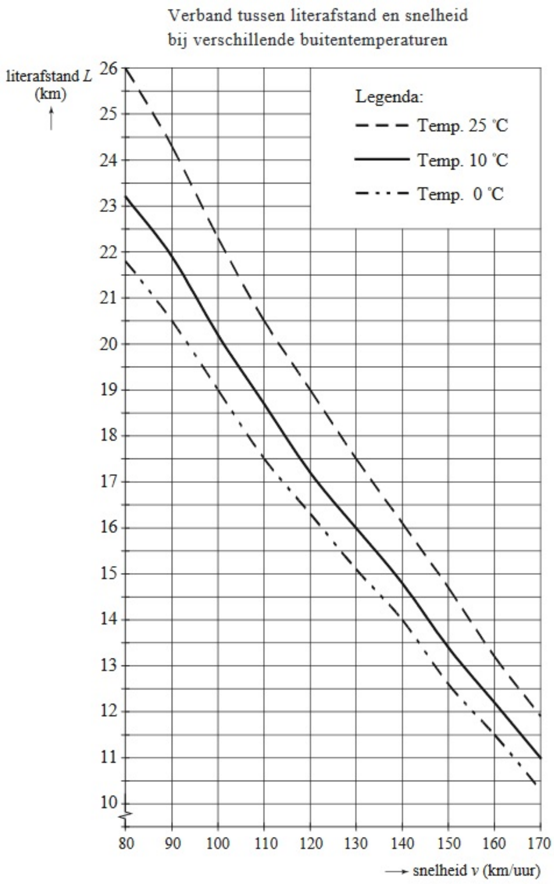
Opgave 1

Het benzineverbruik van een automotor is afhankelijk van verschillende factoren. Een van die factoren is de buitentemperatuur.
In de figuur is voor een aantal verschillende buitentemperaturen de literafstand L (km) uitgezet tegen de snelheid v (km/h).
De literafstand is het aantal kilometer dat met 1 liter benzine gereden kan worden. Hoe groter de literafstand, des te lager het verbruik.

Bekijk de figuur. Te zien is dat bij een snelheid van 90 km/h en een temperatuur van 10 °C de literafstand 21,9 kilometer is en dat bij een temperatuur van 25 °C de literafstand 24,3 kilometer is.

Bereken met lineair interpoleren de literafstand bij deze snelheid en een temperatuur van 13 °C.

(naar: examen havo wiskunde A in 2012, tweede tijdvak)



Figuur 1

Opgave 2

Op een school wordt een prestatieloop voor de vierde klassen georganiseerd. Er moet een afstand van vijftien kilometer worden afgelegd. De gemiddelde snelheid voor een loper in kilometer per uur is v, de totale tijd t.

a Wat voor soort verband bestaat er tussen de snelheid en de tijd?

b Geef een formule die de looptijd t uitdrukt in de gemiddelde snelheid v.

c Wat is de snelheid bij een looptijd van honderd minuten?

d Alle lopers zijn onderweg ongeveer vijf minuten tijd kwijt met het wachten bij een aantal stempelposten.

Maak met dit gegeven een formule voor t van de vorm: $t = \frac{a}{v} + c$.

e Bereken met de tweede formule de gemiddelde snelheid van een loper die in totaal een uur en twintig minuten nodig heeft voor deze afstand.

f Plot de grafiek van de tweede formule. Welke asymptoten heeft de grafiek?

Opgave 3

Gegeven zijn de formules: $P = 5q + 8r + 35$ en $r = 4q - 6$.
Combineer de formules en stel formules op van de vorm $P = ar + b$ en $r = cP + d$.
Welke getallen zijn a, b, c en d?

Opgave 4

Bekijk de tabel met het aantal inschrijvingen voor een hardloopwedstrijd. Er is ruimte voor 2000 inschrijvingen.

tijdstip (uur)	00:00	04:00	08:00	12:00	16:00	20:00
aantal	31	68	150	330	726	1598

Tabel 1

a De aantallen inschrijvingen in de tabel vormen rij u.
Zoek uit of rij u (bij benadering) een rekenkundige of meetkundige rij is.

b Stel een recursieformule op bij rij u. Neem $n = 0$ om 00:00 uur.

c Bereken met de recursieformule het aantal inschrijvingen om 02:00 uur.

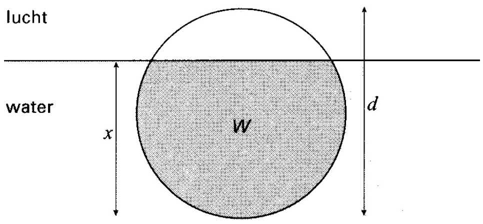
d Stel een directe formule op bij rij u. Is dit een lineaire formule of een exponentiële formule?

e Bereken na hoeveel uur de inschrijving voor de hardloopwedstrijd gesloten wordt, als de groei op deze manier doorgaat.

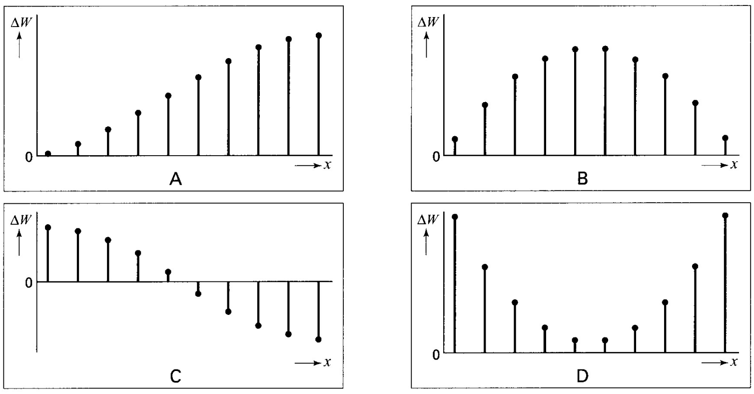
Opgave 5

Als je met een bal in het water speelt en je laat hem onder water los, schiet hij omhoog. Bekijk de figuur waarop een bal gedeeltelijk onder water gehouden wordt. W is het volume van het deel van de bal onder water.

Bekijk de toenamediagrammen van de toename van W als de bal onder water geduwd wordt. x is de diepte onder water van de onderkant van de bal. Drie van de vier diagrammen zijn niet goed.



Figuur 2



Figuur 3

Leg uit welk toenamediagram past bij het onder water duwen van de bal.

A. diagram A
B. diagram B
C. diagram C
D. diagram D

(naar: examen havo wiskunde A1,2 in 2001, tweede tijdvak)

Opgave 6

Gegeven is de functie: $f(x) = (2x - 1)^3 - 4(2x - 1)$.

De grafiek van deze functie is ontstaan uit die van $g(x) = x^3 - 4x$ door twee transformaties toe te passen.

a Welke twee transformaties zijn dat en in welke volgorde moet je ze toepassen?

b Laat zien hoe je de afgeleide van f kunt herleiden uit die van g.

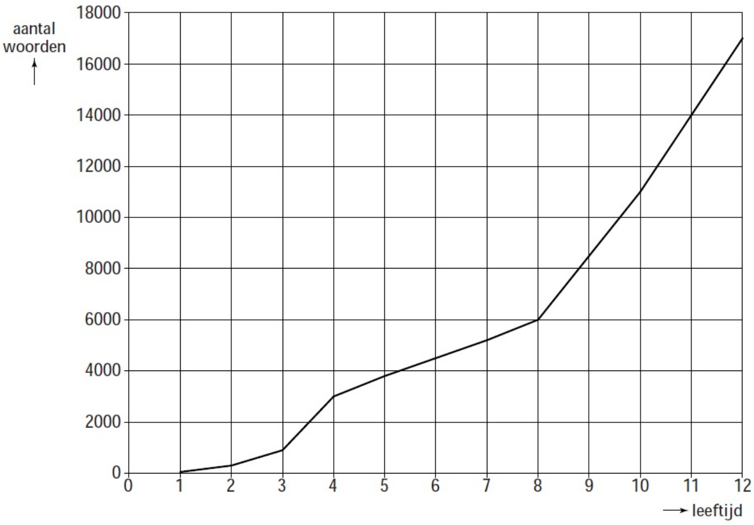
c Bepaal met behulp van de afgeleide de extremen van f in twee decimalen.

Examen

Opgave 7: Woordenschat

De woorden die je begrijpt of kunt gebruiken, vormen samen je woordenschat. Hoe groter je woordenschat is, des te beter kun je teksten lezen, teksten begrijpen en je mondeling en schriftelijk in een taal uitdrukken. In deze opgave beperken we ons tot mensen die opgroeien met de Nederlandse taal als moedertaal.

De woordenschat van een kind groeit bijna onmerkbaar door luisteren, spreken en lezen. In Nederland heeft een kind als het de leeftijd van 4 jaar bereikt een woordenschat van gemiddeld 3000 woorden. Tot de 12e verjaardag groeit dit tot gemiddeld 17000 woorden. In onderstaande figuur is dit grafisch weergegeven.



Figuur 4 gemiddelde woordenschat van Nederlandstalige kinderen in Nederland

Uit de figuur blijkt dat de gemiddelde woordenschat van de 8e tot de 12e verjaardag sneller groeit dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

a Bereken met hoeveel woorden per jaar de gemiddelde woordenschat van een kind meer groeit van de 8e tot de 12e verjaardag dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

We gaan uit van een woordenschat van gemiddeld 17000 op de 12e verjaardag. Na de 12e verjaardag gaat de woordenschat onder jongeren behoorlijk variëren: Bij het bereiken van de leeftijd van 21 jaar varieert deze van 45000 tot 150000.

Bij sommige jongeren spreken we van een hoge woordenschat. Bij hen groeit de woordenschat exponentieel tot gemiddeld 150000 wanneer de leeftijd van 21 jaar bereikt wordt. Hiervoor is de volgende formule opgesteld:

$W_h = 17000 \cdot 1{,}27^t$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

In deze formule is de jaarlijkse groeifactor afgerond op twee decimalen.

b Bereken deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij andere jongeren spreken we van een lage woordenschat. Bij deze jongeren groeit de woordenschat lineair tot gemiddeld 45000 op hun 21e verjaardag. Hiervoor geldt de volgende formule:
$W_l = at + b$
Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.
Ga ook hierbij uit van een woordenschat van 17000 op de 12e verjaardag.

Met behulp van de formule $W_l = at + b$ kan de woordenschat die jongeren met een lage woordenschat op hun 18e verjaardag hebben, berekend worden.
Vervolgens kan met behulp van de formule $W_h = 17000 \cdot 1{,}27^t$ worden berekend hoeveel maanden eerder jongeren met een hoge woordenschat deze zelfde woordenschat zullen hebben.

c Bereken dit aantal maanden.

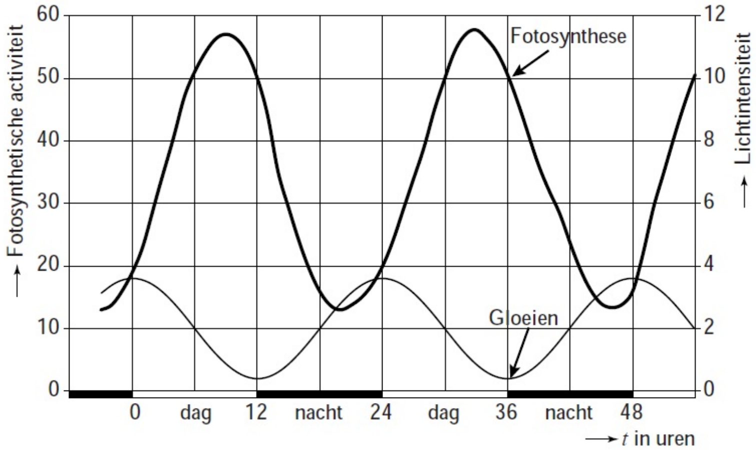
In de praktijk gebruikt men graag formules waar de werkelijke leeftijd in voorkomt. Voor jongeren met een hoge woordenschat geldt de formule
$W_h = 17000 \cdot 1{,}27^t$ (met $t = 0$ op de 12e verjaardag).

d Schrijf deze in de vorm $W_h = b \cdot g^L$, waarbij L de werkelijke leeftijd is. Rond b af op tientallen.

(bron: pilotexamen wiskunde a vwo 2012, tweede tijdvak)

Opgave 8: Algen

Van een bepaald soort ééncellige algen (Gonyaulax polyedra) is het dag- en nachtritme onderzocht. De algen werden blootgesteld aan afwisselend 12 uur licht en 12 uur donker. Deze perioden noemen we respectievelijk dag en nacht. In de figuur zijn resultaten van dit onderzoek te zien.



Figuur 5

Eén van de gemeten activiteiten is fotosynthese, het opslaan van energie met behulp van (zon)licht. De intensiteit van de fotosynthese is weergegeven op de linker verticale as.
De grafiek voor de fotosynthese F als functie van de tijd, kan benaderd worden door een formule van de vorm:
$F = a \cdot b \sin(c(t - 3))$
Hierbij is t de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag.

a Stel deze formule op. Licht je antwoord toe.

Sommige algen lichten vanzelf op in het donker. Dit verschijnsel, gloeien genaamd, is in de figuur ook met een grafiek weergegeven. De lichtintensiteit G werd gemeten in eenheden die langs de rechter verticale as zijn uitgezet. Men kan de grafiek van het gloeien benaderen met de formule:

$G = 2{,}0 + 1{,}6 \sin\left(\frac{1}{12}\pi(t - 18)\right)$

Hierin is t weer de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag. Tijdens iedere periode van 24 uur is de lichtintensiteit van het gloeien gedurende een bepaalde tijd groter dan 3 eenheden.

b Bereken met behulp van de formule van G hoe lang de lichtintensiteit van het gloeien in een periode van 24 uur groter is dan 3 eenheden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

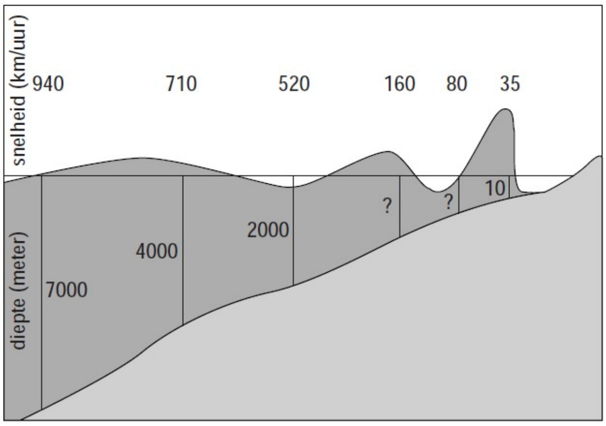
De lichtintensiteit bij gloeien is na een maximum eerst toenemend dalend en daarna afnemend dalend.

c Bij welke snelheid neemt de lichtintensiteit maximaal af bij gloeien? Gebruik de grafiek of de formule in de toelichting.

(bron: pilotexamen wiskunde a vwo 2012, tweede tijdvak, enigszins aangepast)

Opgave 9: Tsunami

Op 26 december 2004 werd Zuidoost-Azië getroffen door een tsunami. Een tsunami is één heel lange golf die bij de kust heel hoog wordt. De tsunami had rampzalige gevolgen voor een aantal kustgebieden. Dit kwam door de enorme hoeveelheid water die door deze tsunami werd meegevoerd.
In onderstaande figuur is een schematisch overzicht te zien van het verloop van een tsunami. Boven elke genoemde waterdiepte is steeds de bijbehorende snelheid weergegeven.



Figuur 6 snelheid in km/uur bij verschillende waterdiepten

In de figuur is bijvoorbeeld te zien dat een tsunami bij een diepte van 4000 meter zich met een snelheid van 710 km/uur verplaatst.

Voor de snelheid van een tsunami geldt bij benadering de volgende formule:

$$v = 11{,}3\sqrt{d}$$

Hierin is v de snelheid in km/uur en d de waterdiepte in meter.

In de figuur ontbreken twee waarden voor de waterdiepte. Zij zijn aangegeven met een vraagteken.

a Bereken met behulp van bovenstaande formule en de gegevens uit de figuur deze twee ontbrekende waarden.

De tsunami van december 2004 werd veroorzaakt door een aardbeving onder zee, 150 km uit de kust van het Indonesische eiland Sumatra.
De tsunami plantte zich voort door de Golf van Bengalen, waar de zee ongeveer 3 km diep is.

b Bereken hoeveel minuten een tsunami nodig heeft om een afstand van 150 km af te leggen in water van 3 km diep.

In de figuur is ook te zien dat in de buurt van de kust, waar de waterdiepte niet zo groot is, de golfhoogte van een tsunami groter wordt. Op volle zee, waar de waterdiepte groot is, is de golfhoogte niet zo hoog.
Bij tsunami's is het volgende verband gevonden tussen waterdieptes en golfhoogtes:

$$h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0{,}25} \cdot h_1$$

Hierin is h_1 de golfhoogte bij waterdiepte d_1 en h_2 de golfhoogte bij waterdiepte d_2. h_1,d_1,h_2 en d_2 zijn in meters.

De tsunami van 26 december 2004 ontstond in een gebied met waterdiepte 1 km en golfhoogte 60 cm.

Met deze gegevens en de formule $h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0,25} \cdot h_1$ kunnen we voor het verdere verloop van deze tsunami het verband tussen de waterdiepte d en de golfhoogte h beschrijven met de formule:

$h \approx 3,37 \cdot d^{-0,25}$

c Toon dit aan.

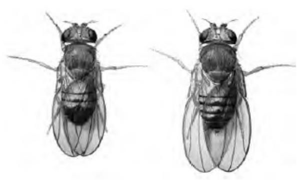
Naarmate een golf dichter bij de kust komt, neemt de waterdiepte steeds verder af. Dit is in de figuur te zien. In de figuur kun je ook zien dat de golfhoogte toeneemt als de golf dichter bij de kust komt. Met behulp van de afgeleide van h kun je onderzoeken of de toename van de golfhoogte groter of kleiner wordt naarmate de golf dichter bij de kust komt.

d Onderzoek met behulp van een schets van de afgeleide van h of deze toename groter of kleiner wordt naarmate de golf dichter bij de kust komt.

(bron: pilotexamen wiskunde a vwo 2012, tweede tijdvak)

Opgave 10: Fruitvliegjes

Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (Drosophila melanogaster). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken.



Figuur 7

Het aantal fruitvliegjes neemt de eerste weken exponentieel toe. Bij een praktische opdracht tellen leerlingen uit 5vwo na 2 weken 140 fruitvliegjes en na 5 weken 1065 fruitvliegjes. Bij deze gegevens is een exponentiële formule te maken voor het aantal fruitvliegjes F na t weken.

a Geef deze formule. Licht je antwoord toe.

In een kweekruimte kan het aantal fruitvliegjes niet onbeperkt toenemen. Het maximale aantal fruitvliegjes is afhankelijk van de grootte van de kweekruimte. Een ander experiment, dat werd gestart op 10 november 2011, werd in een kleinere kweekruimte uitgevoerd. Bij het vervolg van deze opgave gaan we uit van de volgende formule die het aantal fruitvliegjes bij dit experiment beschrijft:

$F = \frac{340}{1+54\,\mathrm{e}^{-0,24t}}$

Hierbij is t de tijd in dagen na 10 november 2011 en F het aantal fruitvliegjes.

b Welke aantallen fruitvliegjes zijn volgens bovenstaande formule in de kweekruimte mogelijk? Licht je antwoord toe.

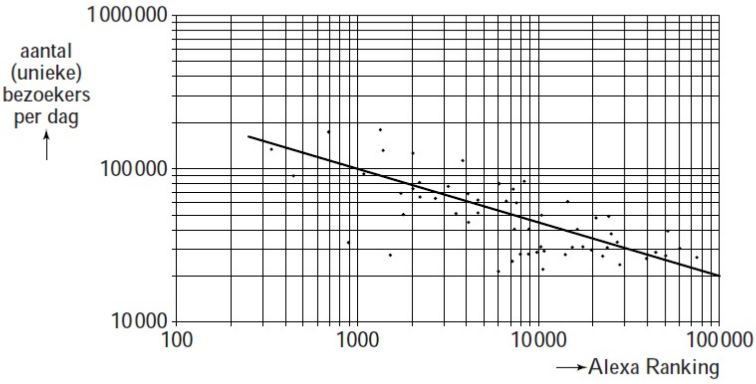
Fruitvliegjes zijn met een beetje etherdamp gemakkelijk te verdoven waarna je ze kan tellen en met een loep bestuderen. Op de dag dat er de meeste fruitvliegjes bijkomen wil Boris ze verdoven.

c Bereken met behulp van de afgeleide van F op welke datum er de meeste fruitvliegjes bijkomen.

(bron: pilotexamen wiskunde a vwo 2012, tweede tijdvak, enigszins aangepast)

Opgave 11: Websites

Een manier om de populariteit van websites te meten, is door naar de zogenoemde Alexa Ranking te kijken. Het internetbedrijf Alexa houdt bij hoe vaak websites bezocht worden, en stelt daarvan een ranglijst op. Zo heeft de website google.com wereldwijd ranking 1 met 1,2 miljard unieke bezoekers per dag (begin 2011).
Voor een aantal Nederlandse websites is het verband tussen de Alexa Ranking en het aantal unieke bezoekers per dag weergegeven in onderstaande figuur. In de figuur is op beide assen gebruik gemaakt van een logaritmische schaalverdeling.



Figuur 8

In de figuur is te zien dat er verschillende websites zijn met een Alexa Ranking tussen de 1000 en de 2000. Het verschil tussen de bijbehorende aantallen unieke bezoekers per dag van deze websites is vrij groot.

a Bereken dit maximale verschil met behulp van de figuur.

De punten in de figuur liggen globaal op een rechte lijn. Deze lijn is in de figuur getekend. Bij deze lijn hoort de formule $B = 1118000 \cdot r^{-0,35}$.
Hierin is B het aantal unieke bezoekers per dag en r de Alexa Ranking van de website.
Lang niet bij alle aantallen unieke bezoekers per dag is in de figuur precies af te lezen welke Alexa Ranking de betreffende website heeft. Met de hierboven vermelde formule is deze ranking wel te berekenen.

b Bereken met behulp van de formule de Alexa Ranking van een website met 25000 unieke bezoekers per dag.

c Beredeneer aan de hand van de formule dat de grafiek van B daalt.

De formule $B = 1118000 \cdot r^{-0,35}$ kan herschreven worden in de vorm
$\log(B) = a + b \cdot \log(r)$.

d Bereken de waarden van a en b.

(bron: pilotexamen wiskunde a vwo 2012, tweede tijdvak, enigszins aangepast)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.