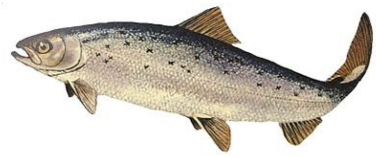
5.4 Verandering

Inleiding



Figuur 1 bron: Wikipedia

In veel praktijksituaties worden rekenmodellen gebruikt. Bijvoorbeeld voor verzekeringspremies, hypotheken, filevorming, luchtstromingen, bevolkingsgroei (en niet alleen van mensen). Bureau's als het Centraal Planbureau, het Centraal Bureau voor de Statistiek en allerlei particuliere bureau's bestaan ervan. Een aardig voorbeeld is het groeimodel van een populatie zalmen in een kweekvijver. De snelheid waarmee het aantal zalmen in de kweekvijver toeneemt is voor de kweker interessant. Immers als die toenamesnelheid groot is kan hij het beste 'oogsten'.

Je leert in dit onderwerp

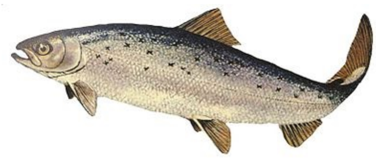
- vanuit een grafiek een hellingsgrafiek of toenamediagram afleiden en omgekeerd;
- de afgeleide toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- de verandering van een functies vertalen in een toenamediagram dan wel een hellingsgrafiek;
- de techniek van het differentiëren gebruiken om de afgeleide van een functie te bepalen en daarmee hellingswaarden en extremen te berekenen.

Verkennen

Opgave V1



Figuur 2 bron: Wikipedia

Wanneer een zalmkwekerij een aantal zalmen in een vijver uitzet en de condities zijn in orde, dan zullen de vissen zich gaan vermenigvuldigen.
Het verband tussen de tijd t in maanden nadat de eerste vissen in de vijver zijn uitgezet en het aantal vissen a dat in de vijver leeft, wordt weergegeven met de formule:

$a = \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$

De zalmkweker kan het beste zalmen gaan vangen als de groeisnelheid hoog is, dan groeit de populatie na het vangen ook snel weer aan.

a Welke functie hoort bij de groeisnelheid van deze populatie zalmen?

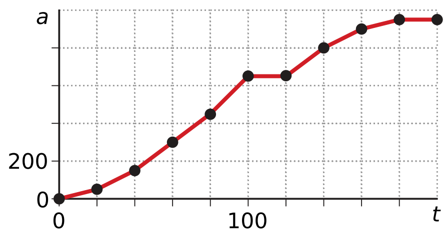
b Plot de grafiek van deze functie. Waaraan zie je dat het aantal zalmen altijd toeneemt?

c Na hoeveel tijd is de groeisnelheid maximaal? Hoeveel zalmen komen er dan per maand bij?

Uitleg 1

Bekijk de grafiek met daarin de afgelegde afstand a (m) van een fietser uitgezet tegen de tijd (s).

Bij deze grafiek kan een toenamediagram met stapgrootte $\Delta t = 20$ getekend worden. Maak eerst een tabel. Onder Δa wordt de toename van de afgelegde afstand a verstaan.

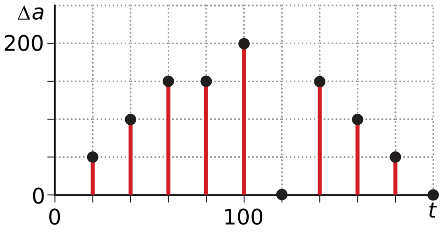


Figuur 3

t (s)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Δa (m)	-	50	100	150	150	200	0	150	100	50	0

Tabel 1

Deze tabel kun je weergeven in een toenamediagram. Als de toename positief is, wordt het staafje naar boven getekend. Is de toename negatief (afname), dan wordt het staafje naar beneden getekend.



Figuur 4

Neem je de stapgrootte steeds dichter bij 0 dan vormen de eindpunten van de staafjes de hellingsgrafiek bij de gegeven grafiek.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.
Wat kun je zeggen over het gedrag van de fietser als:

a De staafjes van het toenamediagram positief zijn.

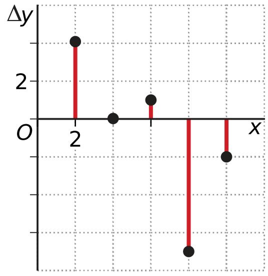
b De staafjes van het toenamediagram langer worden.

c De staafjes van het toenamediagram korter worden.

d Het toenamediagram een staafje van 0 heeft.

Opgave 2

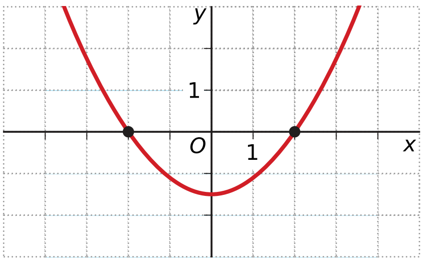
Schets een mogelijke grafiek door het punt (4,8) bij het toenamediagram.



Figuur 5

Opgave 3

Gegeven is deze hellingsgrafiek.
Schets er een mogelijke grafiek bij. Ga er van uit dat de grafiek door (0,0) gaat.



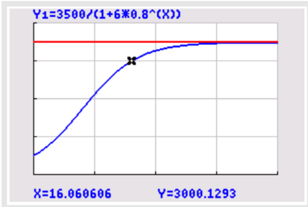
Figuur 6

Uitleg 2

Wanneer een zalmkwekerij een aantal zalmen in een vijver uitzet en de condities zijn in orde, dan zullen de vissen zich gaan vermenigvuldigen.
Het verband tussen de tijd t in maanden nadat de eerste vissen in de vijver zijn uitgezet en het aantal vissen a dat in de vijver leeft, wordt weergegeven met de formule:

$a = \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$

Je ziet hier de bijbehorende grafiek.



Figuur 7

Het differentiequotiënt (ook wel de gemiddelde verandering, de helling, of de richtingscoëfficiënt genoemd) op het interval [10,20] is:

$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^{20}} - \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^{10}}}{20-10} \approx 114{,}5$

Het differentiaalquotiënt is de gemiddelde verandering in een punt. Dit kun je benaderen door de gemiddelde verandering te berekenen op een heel klein interval, bijvoorbeeld [10; 10,001] of nog kleiner.

$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^{10{,}001}} - \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^{10}}}{10{,}001-10} \approx 186$

In de figuur is te zien dat het aantal zalmen a steeds stijgt als de tijd t toeneemt. Dit is ook in te zien met behulp van de afgeleide van $a(t)$.

$a'(t) = \frac{-3500 \cdot 6 \cdot 0{,}8^t \cdot \ln(0{,}8)}{(1+6 \cdot 0{,}8^t)^2}$

a' is altijd positief, dus de grafiek van a is stijgend.
De grafiek van a is eerst toenemend stijgend en na verloop van tijd afnemend stijgend.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 2**.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval [10,30].

b Bereken het differentiaalquotiënt bij $t = 20$, neem $\Delta t = 0{,}001$.

c Laat zien, hoe je door differentiëren de afgeleide $a'(t)$ kunt vinden.
Laat met behulp van die afgeleide zien, dat $a'(20)$ overeen komt met het antwoord bij b.

d Wat is de betekenis van de afgeleide bij $t = 20$?

Opgave 5

De totale winst (×1000 euro) voor een fabriek kan berekend worden met de formule:
$TW = -0{,}34q^3 + 3{,}65q^2 + 2q - 25$.
Hierin is TW de totale winst en q het aantal geproduceerde producten (×1000).

a Bereken met behulp van differentiëren bij welk geproduceerd aantal producten de totale winst maximaal is. Hoeveel bedraagt die maximale winst?
Rond af op gehele euros.

b Bereken ook met behulp van differentiëren voor welke q de helling van TW maximaal is. Hoe groot is die helling?

c Wat is de praktische betekenis van je antwoorden bij b?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als bij de grafiek van $f(x)$ de waarde van x met een vaste stapgrootte Δx wordt vergroot, kun je een tabel maken van de toenames Δy van de functiewaarden: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
Bij een positieve toename wordt het staafje naar boven getekend.
Bij een negatieve toename (afname) wordt het staafje naar beneden getekend.

De **gemiddelde verandering** (ook wel het differentiequotiënt genoemd) van de functie f op het interval $[a,b]$ is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Het **differentiaalquotiënt** $\frac{\text{d}y}{\text{d}x}$ voor $x = a$ is de gemiddelde verandering in een punt. Deze kun je benaderen door de gemiddelde verandering te berekenen op een heel klein interval. Bijvoorbeeld het interval $[a; a + 0{,}0001]$ of nog kleiner.

Je kunt $\frac{\text{d}y}{\text{d}x} = f'(x)$ ook bepalen door de **afgeleide** te nemen van de functie.

- Als $f'(x) > 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn positief en stijgt de grafiek.
- Als $f'(x) < 0$, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn negatief en daalt de grafiek.
- Als $f'(x) = 0$, dan is het hellingsgetal van de raaklijn 0. Er kan dan sprake zijn van een top.

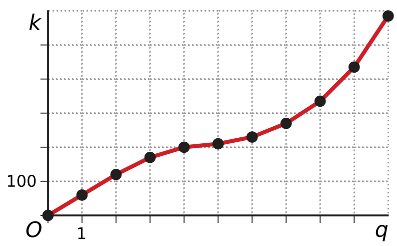
De grafische rekenmachine kan het differentiaalquotiënt, het hellingsgetal van de raaklijn in een punt x aan de grafiek berekenen.

Extreme waarden kunnen worden gevonden door eerst te differentiëren, de afgeleide gelijk te stellen aan nul en vervolgens de ontstane vergelijking op te lossen. Controleer wel of er inderdaad van een extreme waarde sprake is. Je kunt het maximum of minimum ook met de grafische rekenmachine bepalen.

Voorbeeld 1

Bekijk de kostengrafiek waarin de totale variabele kosten k (€) van een bedrijf zijn uitgezet tegen het aantal producten q (×100) dat het bedrijf produceert.

De marginale kosten zijn de extra totale kosten die een bedrijf maakt als de productie met één product uitgebreid wordt.



Figuur 8

- Bereken de marginale kosten bij een productie van 200 stuks.
- Hoe kun je aan de grafiek zien dat de marginale kosten steeds positief zijn?
- Schets de hellingsgrafiek. Wat heeft de hellingsgrafiek met de marginale kosten te maken?
- Bij de productie van hoeveel stuks zijn de marginale kosten minimaal?

Antwoord

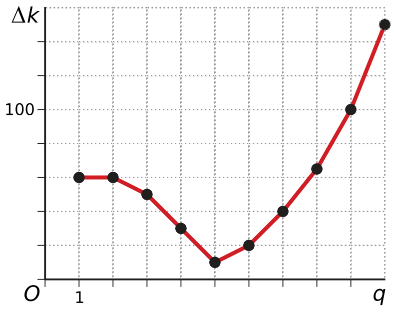
De marginale kosten bij een productie van 200 stuks zijn $\frac{120-60}{200-100} = 0{,}60$ euro.

De kostengrafiek is steeds stijgend, dus de marginale kosten zijn steeds positief.

Maak eerst een tabel.

q (×100)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	0	60	120	170	200	210	230	270	335	435	585
Δk	-	60	60	50	30	10	20	40	65	100	150

Tabel 2



Figuur 9

De hellingsgrafiek is de grafiek van de marginale kosten.

Volgens de hellingsgrafiek zijn de marginale kosten minimaal bij een productie van 500 stuks.

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Hoe ziet de grafiek van de marginale kosten eruit als de grafiek van de totale variabele kosten constant stijgt?

b Is een bedrijf nog klein, dan stijgen de totale variabele kosten recht evenredig met de productie. Dat wil zeggen dat de kosten voor ieder geproduceerd product steeds gelijk blijven. Voor ieder product is dan even veel grondstof nodig tegen dezelfde prijs.
Bij welke productieaantallen is dit het geval?

c Hoe ziet de grafiek van de marginale kosten eruit als de grafiek van de totale variabele kosten afnemend stijgt?

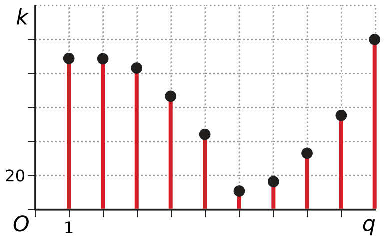
d Als de productieomvang stijgt, kan het bedrijf grondstoffen in grotere hoeveelheden inkopen, waardoor het korting krijgt en de totale variabele kosten dalen bij een stijgende productie.
Bij welke productieaantallen is dit het geval?

e Als de grafiek van de totale variabele kosten toenemend stijgt, hoe loopt de grafiek van de marginale kosten dan?

f Als de productieomvang heel groot wordt, kan het bedrijf minder efficiënt produceren. Er is dan meer uitval en meer afval, waardoor de totale variabele kosten stijgen.
Bij welke productieaantallen is dit het geval?

Opgave 7

Bekijk het toenamediagram van de totale variabele kosten van een bedrijf uitgezet tegen het aantal producten q (×100) dat het bedrijf produceert.



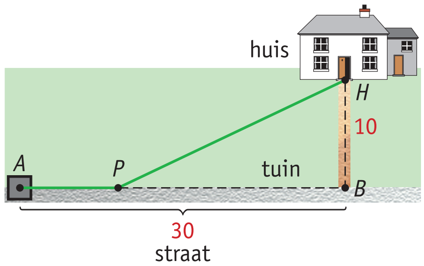
Figuur 10

Schets de grafiek van de totale variabele kosten.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Een woonhuis heeft een nieuwe waterleiding nodig. Het huis H staat op een afstand van 10 meter van de rechte weg AB. Het aansluitingspunt A voor de waterleiding ligt 30 meter verderop in de straat. De sleuf voor de waterleiding kan geheel of gedeeltelijk door de tuin gegraven worden. Het graven en weer netjes dichtmaken van een sleuf in de tuin kost 1,5 keer zo veel tijd als datzelfde werk langs de wegkant. Hoe moet er worden gegraven om alles in zo kort mogelijke tijd te doen?



Figuur 11

Antwoord

P is het punt waarbij de waterleiding de weg verlaat en dwars door de tuin verder gaat. Neem x meter voor de lengte van BP en t voor de benodigde tijd per meter langs de weg.

De totale benodigde tijd is: $T = t(30 - x) + 1{,}5t\sqrt{x^2 + 100}$.
Met behulp van differentiëren vind je de waarde van x waarvoor T minimaal is; de waarde van t mag hierin worden weggelaten.

$T'(x) = -1 + \frac{1{,}5x}{\sqrt{x^2+100}}$

De minimaal benodigde tijd vind je uit $T'(t) = 0$:

$$\begin{aligned} -1 + \frac{1{,}5x}{\sqrt{x^2+100}} &= 0 \\ \sqrt{x^2 + 100} &= 1{,}5x \\ 1{,}25x^2 &= 100 \\ x &= \sqrt{80} \vee x = -\sqrt{80} \end{aligned}$$

Plot de grafiek. Uit de grafiek van T blijkt dat T minimaal is als $x = \sqrt{80} \approx 8{,}94$ m.
De te graven sleuf moet daarom na 21,06 m afslaan naar de tuin en recht doorsteken naar het woonhuis.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**.

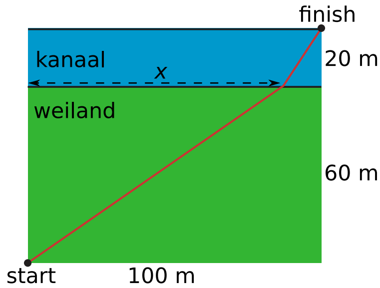
a Toon aan dat voor de totale tijd $T(x)$ als functie van de afstand x en de benodigde tijd t langs de weg geldt: $T = t(30 - x) + 1{,}5t\sqrt{x^2 + 100}$.

b Toon aan dat bij het vinden van de kortst benodigde tijd voor het graven de waarde van t geen enkele rol speelt.

Opgave 9

Tijdens een poldercross moeten de deelnemers lopend een afstand over een weiland afleggen en zwemmend een kanaal oversteken.

Een van de deelnemers loopt met een gemiddelde snelheid van 6 m/s en zwemt met een gemiddelde snelheid van 2 m/s.



Figuur 12

a Leg uit dat bij de kortste afstand niet de snelste tijd hoort.

b Laat zien dat de functie $t(x)$ met tijd uitgedrukt als functie van x is:
$t(x) = \frac{\sqrt{3600+x^2}}{6} + \frac{\sqrt{x^2-200x+10400}}{2}$.

c Bereken de afgeleide van t.

d Bereken voor welke waarde van x de deelnemer van de poldercross de snelste tijd heeft.

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de formule: $y = 3 \cdot \sqrt{x}$.

a Teken het toenamediagram met stapgrootte 1 van $x = 0$ tot $x = 6$.

b Hoe ziet het toenamediagram van $y = 3 \cdot \sqrt{x} + 4$ er uit?

Opgave 11

Een fabrikant verkoopt zelfrijzend bakmeel voor € 2,25 per kilogram. Bekijk de tabel met de kosten TK voor productie en opslag.

q (honderd kg)	1	2	3	4	5	6
TK (€)	75	100	125	200	400	800

Tabel 3

a Hoeveel stijgt de winst gemiddeld per kilogram als de productie toeneemt van 400 naar 500 kg?

b Voor de kosten heeft de fabrikant de formule $TK = 10q^3 - 60q^2 + 130q$ laten opstellen.
Ga na dat deze formule past bij de gegevens in de tabel.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van q.

d Bepaal met behulp van differentiëren de maximale winst.

Opgave 12

Bekijk de tabel met tussentijden van een wielrenner op bepaalde plaatsen in een tijdrit.

tijd t (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand a (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 4

a Bereken het differentiequotiënt op het tijdsinterval [0,10].

b Welke betekenis heeft dit getal voor de wielrenner?

A. Het is de afgelegde afstand in die periode.
B. Het is de snelheid gedurende die periode.
C. Het is de gemiddelde snelheid gedurende die periode.

c Je kunt bij deze tabel een grafiek maken door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd t in minuten, op de verticale as de afgelegde afstand a in kilometer. Bereken het hellingsgetal van het lijnstuk dat hoort bij het interval [44,60].

d Bereken voor het tijdsinterval [18,44] de waarde $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ in twee decimalen.

e Welke betekenis hebben de bij c en d gevonden getallen voor de grafiek? Geef alle goede antwoorden.

A. Ze geven de helling van het lijnstuk door de punten op de grafiek bij begin en eind van het tijdsinterval.
B. Ze geven de totale toename van de afstand weer op het tijdsinterval.
C. Ze geven de gemiddelde toename van de afstand per minuut weer op het tijdsinterval.

Opgave 13

De makers van een nieuw te bouwen indoor skipiste gaan in plaats van een helling een complete berg maken. Het zijaanzicht van de berg heeft een sinusvorm. Bij deze berg hoort de formule:
$h = 30 + 30\sin(0{,}0025\pi x - 0{,}5\pi)$
Hierin is h de hoogte van de berg in meter en x de horizontale afstand in meter vanaf de linker voet van de berg.

De helling van de berg is niet overal even groot. Om te bepalen wat de moeilijkheidsgraad (kleur) van deze piste is, moet het hellingspercentage berekend worden voor het steilste stuk van de berghelling.

a Bereken welke x-waarden horen bij het steilste stuk links en rechts van de bergtop.

b Bekijk de tabel met het hellingspercentage per kleur piste.

kleur	hellingspercentage
groen	3 – 9%
blauw	10 – 16%
rood	17 – 23%
zwart	vanaf 24%

Tabel 5

Gebruik de grafische rekenmachine en bepaal welke kleur er bij deze berg hoort.

Opgave 14

Een gelijkstroomcircuit bestaat uit een 15 volts batterij met een inwendige weerstand van 15 ohm en een variabele weerstand van R (ohm). Het vermogen P (watt) dat door dit circuit wordt opgewekt, wordt gegeven door: $P = RI^2$.

De stroomsterkte I wordt daarin gegeven door: $I = \frac{15}{R+15}$.

a Druk het ontwikkelde vermogen uit in R, de variabele weerstand.

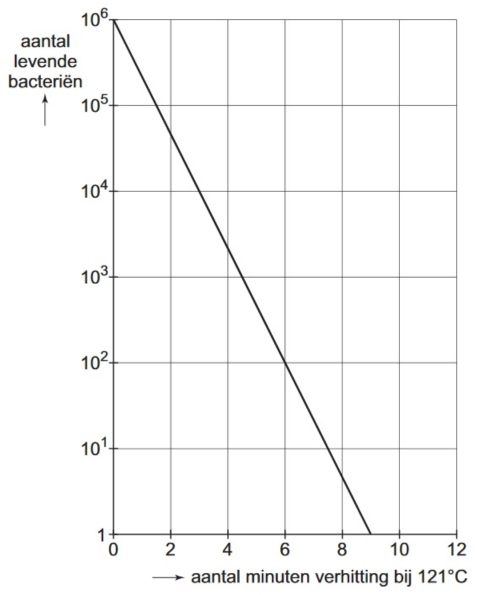
b Bereken het maximaal ontwikkelde vermogen met behulp van differentiëren.

Toepassen

Opgave 15: Sterilisatie (2)

Om voedingswaren tegen bederf te beschermen, worden ze tijdelijk verhit. Men noemt dit steriliseren. Er zijn verschillende sterilisatiemethodes. In deze opgave kijken we naar het sterilisatieproces bij twee soorten bacteriën. De temperatuur bij dat proces is 121 °C. Naarmate de bacteriën korter aan deze temperatuur zijn blootgesteld, zullen er meer bacteriën overleven. Bekijk de overlevingsgrafiek van een bepaalde bacterie.

Voor de bacterie geldt de formule:
$N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2{,}2 \cdot t}$
Hierin is N het aantal bacteriën na t minuten.
Met behulp van deze formule kun je voor elk tijdstip t berekenen hoe groot het aantal bacteriën op dat tijdstip is. Je kunt aan deze formule (en ook aan de grafiek) zien dat er steeds minder bacteriën zijn naarmate de tijd toeneemt. Het aantal bacteriën neemt echter niet met een vast aantal per minuut af.



Figuur 13

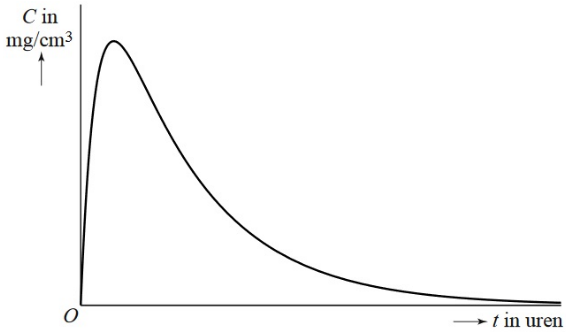
Bereken op welk tijdstip dat aantal bacteriën afneemt met 10000 bacteriën per minuut. Gebruik hiervoor de afgeleide van $N(t)$.

(naar: examen wiskunde A1,2 in 2006, tweede tijdvak)

Opgave 16: Hooikoorts

Hooikoorts is een vervelende allergische aandoening waar veel mensen last van hebben. Iemand die last heeft van hooikoorts, reageert op zogenoemde pollen in de lucht, die afkomstig zijn van bomen en grassen die in bloei staan. De allergische reactie veroorzaakt naast irritatie aan ogen, neus en keel ook hoest- en niesbuien.

PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht. Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af, omdat het door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan is C. Bekijk de figuur met een schets van de grafiek van C.



Figuur 14

Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op die dit verloop redelijk benadert:

$C_1(t) = \frac{16t}{190t^2+60}$

Hierin is C_1 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t de tijd in uur na het innemen van de pil.

a Bereken met behulp van de afgeleide van C_1 na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

Een andere onderzoeker stelt een geheel andere formule op voor het verband tussen de tijd na het innemen van de pil en de concentratie werkzame stof:

$C_2(t) = 0{,}13\left(e^{-0{,}65t} - e^{-3{,}9t}\right)$

Hierin is C_2 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t de tijd in uur na het innemen van de pil.

Aan de schets van de grafiek is te zien dat de werkzame stof na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen is. Met een redenering kun je aantonen dat elk van beide formules dit proces beschrijft.

b Beredeneer aan de hand van de formules van C_1 en C_2 dat de werkzame stof volgens beide formules na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed is verdwenen.

c Hoewel de grafieken van C_1 en C_2 beide erg op de grafiek in de figuur lijken, verschillen de momenten waarop het maximum bereikt wordt wel van elkaar. Onderzoek met behulp van de afgeleide C_2' of het maximum van C_2 eerder of later dan het maximum van C_1 optreedt.

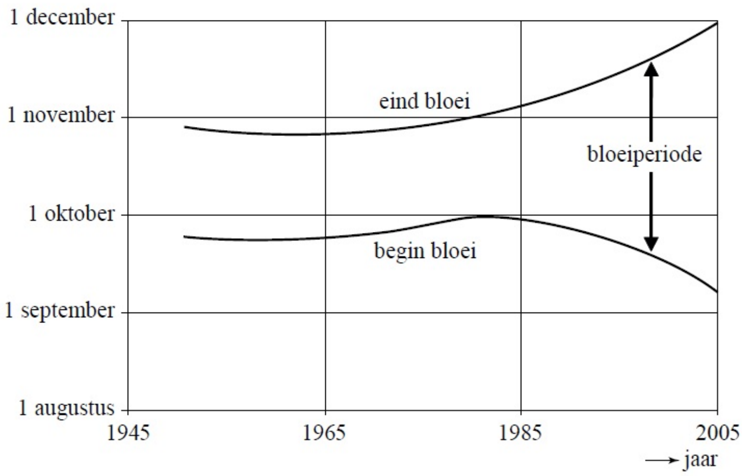
(naar: pilotexamen vwo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 17

In Zuid-Engeland onderzoekt men sinds 1950 de lengte van de bloeiperiode van paddenstoelen. Na vele duizenden waarnemingen bij 315 verschillende paddenstoelsoorten hebben Britse onderzoekers geconcludeerd dat er sinds 1980 een duidelijke verandering van de gemiddelde lengte van de bloeiperiode zichtbaar is. Zie figuur 1.

figuur 1 Bloeiperiode paddenstoelen



Figuur 15

Van 1950 tot 1980 bleef de lengte van de bloeiperiode ongeveer gelijk. Daarna is deze in de periode van 1980 tot 2005 toegenomen van 30 tot 83 dagen. In deze opgave nemen we aan dat de lengte van de bloeiperiode sinds 1980 exponentieel toeneemt.

a Bereken met de gegevens van 1980 en 2005 het jaarlijkse groeipercentage vanaf 1980 in twee decimalen nauwkeurig.

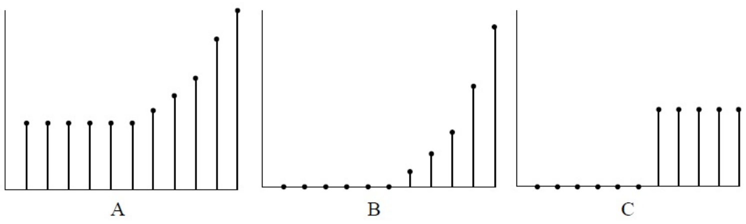
Vanaf 1980 is de lengte van de bloeiperiode bij benadering te beschrijven met de formule:
$B = 30 \cdot 1{,}042^t$.
Hierin is B de lengte van de bloeiperiode in dagen en t de tijd in jaren vanaf 1980.

De lengte van de bloeiperiode is van 1980 tot 2005 ruimschoots verdubbeld.

b Bereken in hoeveel jaar de bloeiperiode twee keer zo lang wordt.

Bij de lengte van de bloeiperiode, zoals die aangegeven is in figuur 1, kun je een toenamediagram tekenen. In figuur 2 staan drie toenamediagrammen, waarvan er één goed past bij de bloeiperiode tussen 1950 en 2005.

figuur 2



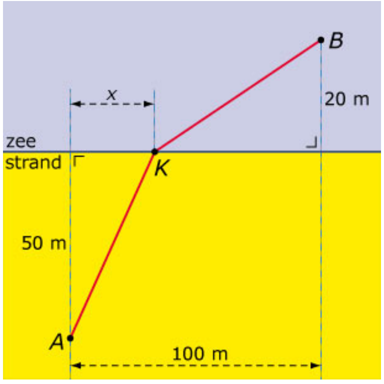
Figuur 16

c Geef met een toelichting aan welk toenamediagram het juiste is.

(bron: examen havo wiskunde a in 2012)

Opgave 18

Een zwemmer is in nood voor de kust van Bergen. De tekening geeft een beeld van de situatie. De zwemmer bevindt zich bij punt B in zee. Een lid van de reddingsbrigade ziet hem en wil in actie komen. Zij bevindt zich in punt A en wil via de snelste weg naar de zwemmer in nood toe. Maar wat is de snelste weg?
Een deel van de weg moet ze rennend afleggen en een deel zwemmend. Ze rent met een gemiddelde snelheid van 6 m/s en zwemt met een gemiddelde snelheid van 1,5 m/s. Hoe kan ze het snelst hulp bieden? Noem het punt waar ze het water in stapt K.
Punt K kan overal langs de aangegeven 100 m-lijn liggen. De tijd die ze nodig heeft om in B te komen moet zo klein mogelijk zijn. Noem de totale tijd t, de gemiddelde snelheid over het strand v_s en de gemiddelde snelheid in zee v_z.



Figuur 17

a Druk t uit in AK, KB, v_s en v_z.

b Formuleer een verband tussen t en x.

c Bepaal met behulp van differentiëren de minimale tijd die het lid van de reddingsbrigade nodig heeft om de zwemmer te bereiken. Geef je antwoord afgerond op een tiende seconde.

d Bepaal de kortste weg.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.