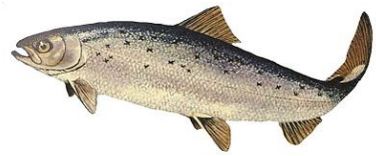
5.3 Redeneren met formules

Inleiding

In veel praktijksituaties worden rekenmodellen gebruikt. Bijvoorbeeld voor verzekeringspremies, hypotheken, filevorming, luchtstromingen, bevolkingsgroei (en niet alleen van mensen). Bureau's als het Centraal Planbureau, het Centraal Bureau voor de Statistiek en allerlei particuliere bureau's bestaan ervan. Een aardig voorbeeld is het groeimodel van een populatie zalmen in een kweekvijver...



Figuur 1 **bron: Wikipedia**

Je leert in dit onderwerp

- karakteristieken van functies afleiden uit de formule en bijbehorende vergelijkingen en ongelijkheden oplossen;
- rekenmodellen waarin de tijd in stappen gaat (rijen) beschrijven door recursieformules en/of directe formules en daarmee rekenen.

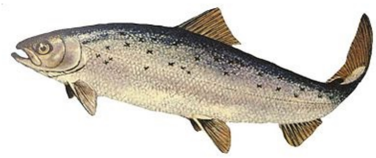
Voorkennis

- de eigenschappen van de verschillende soorten functies;
- werken met rijen, met name rekenkundige en meetkundige rijen.

Verkennen

Opgave V1

Wanneer een zalmkwekerij een aantal zalmen in een vijver uitzet en de condities zijn in orde, dan zullen de vissen zich gaan vermenigvuldigen.
Het verband tussen de tijd t in maanden nadat de eerste vissen in de vijver zijn uitgezet en het aantal vissen a dat in de vijver leeft, wordt weergegeven met de formule:



Figuur 2 **bron: Wikipedia**

$a = \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$

a Plot de groeigrafiek van deze zalmpopulatie.

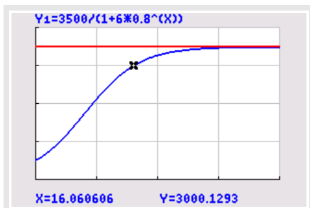
b Beredeneer hoeveel zalmen er maximaal in deze vijver kunnen leven in dit groeimodel.

c Wanneer zou je als zalmkweker het best kunnen beginnen met zalmen vangen?

Uitleg 1

Wanneer een zalmkwekerij een aantal zalmen in een vijver uitzet en de condities zijn in orde, dan zullen de vissen zich gaan vermenigvuldigen.
Het verband tussen de tijd t in maanden nadat de eerste vissen in de vijver zijn uitgezet en het aantal vissen a dat in de vijver leeft, wordt weergegeven met de formule:

$a = \frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$



Figuur 3

Bekijk de grafiek. Het aantal vissen in de vijver groeit eerst exponentieel, maar bereikt daarna een grenswaarde (het verzadigingsniveau). Dat komt doordat de vijver dan verzadigd is met vissen. Als er nog meer vissen bij zouden komen, dan zou er niet meer genoeg leefruimte zijn voor iedere vis.
Wat die grenswaarde precies is, kun je afleiden uit de formule.

- Wanneer je voor t een heel grote waarde invult (bijvoorbeeld 1000000), dan nadert $0{,}8^t$ naar 0.
- Dit betekent dat $1 + 6 \cdot 0{,}8^t$ naar 1 nadert.
- En dus nadert $\frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t}$ naar $\frac{3500}{1} = 3500$.

De grenswaarde is dus 3500 zalmen. De zalmkweker gaat voor het eerst zalmen vangen als er 3000 vissen in de vijver zitten.
Om uit te zoeken na hoeveel maanden dat het geval is, moet je een vergelijking oplossen:

$\frac{3500}{1+6 \cdot 0{,}8^t} = 3000$

Dit kun je schrijven als $1 + 6 \cdot 0{,}8^t = \frac{3500}{3000} = \frac{7}{6}$ en $0{,}8^t = \frac{1}{36}$ zodat $t = {}^{0,8}\log\left(\frac{1}{36}\right) \approx 16$.

Na 16 maanden wordt het aantal van 3000 vissen in de vijver bereikt.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit **Uitleg 1**.

a Bereken het aantal vissen dat volgens de eerste formule na tien maanden in de vijver zit.

b Vul $t = 1000000$ in de formule in en laat daarmee zien dat de grenswaarde 3500 is.

c Welke ongelijkheid moet je oplossen als er maximaal 2600 vissen in de vijver mogen zitten? Los deze ongelijkheid op.

d Welke formule krijg je als de vissen zich twee keer zo snel gaan vermenigvuldigen? Neem a_2 voor het aantal vissen en t voor de tijd in maanden.

e Plot de grafieken van a en de grafiek van a_3.
Hoe wordt de grafiek van a_2 verkregen uit de grafiek van a?

Opgave 2

Beredeneer aan de hand van de functie of de bijbehorende grafiek stijgend of dalend is en welke grenswaarde de grafiek mogelijk benadert.

a $f(x) = \frac{720}{1+3 \cdot 0{,}5^x}$

b $g(x) = 500(3 - 0{,}75^x)$

c $h(x) = \frac{21+6 \cdot 1{,}5^x}{250}$

d $i(x) = 55 - \frac{33}{x+1}$

Uitleg 2

Er bestaan ook rekenmodellen waarin met vaste stappen wordt gerekend, bijvoorbeeld bij het in waarde toenemen of dalen van een aandelenpakket uitgaande van een vast maandelijks rendement.

Neem bijvoorbeeld een aandelenpakket met een waarde van € 12000,00.
De aanbieder van dit aandelenpakket belooft een gemiddelde waardestijging van 6% per jaar. Over hoeveel jaar is het pakket meer dan € 20000,00 waard?

De waarde w_n na n jaar van dit pakket kun je op twee manieren doorrekenen:

- Door een proces van recursie:
  Je kijkt steeds terug naar het voorgaande jaar: $w_n = 1{,}06 \cdot w_{n-1}$ met $w_0 = 12000$.
- Door een directe formule samen te stellen:
  De waarde in jaar n is $w_n = 12000 \cdot 1{,}06^n$.

In het eerste geval heb je voor de rij getallen een recursieformule en een startwaarde nodig. In het tweede geval geeft de directe formule meteen de waarde in het $n$de jaar. Omdat hier steeds met een vast getal wordt vermenigvuldigd, is de rij w_n een meetkundige rij.

Een directe formule kan als iedere andere formule worden ingevoerd op de grafische rekenmachine. Een recursieformule kan ook in de grafische rekenmachine worden ingevuld, zoals je weet.

Er bestaan ook rekenkundige rijen. Bij dit soort rijen is het verschil tussen twee opeenvolgende termen uit de rij constant.

Opgave 3

Bekijk de rij getallen: 1020,1080,1140,1200,1260,1320,....
Deze getallen vormen een rij u_n met $u_0 = 1020$.

a Welke regelmaat zit er in rij u_n?

b Is rij u_n een meetkundige of rekenkundige rij?

c Stel een recursieformule op bij rij u_n.

d Bereken u_6 met behulp van de recursieformule.

e Stel een directe formule op bij rij u_n.

f Bereken de honderdste term van rij u_n.

Opgave 4

Anna en Bas huren elk een huis voor € 9000,00 per jaar. In 2010 moesten ze beiden € 9000,00 aan huur betalen. De huur voor Anna wordt jaarlijks verhoogd met € 350,00; die van Bas wordt jaarlijks verhoogd met 2,8%.

a Stel een directe formule op voor de huur a_n van Anna in jaar n met $n = 0,1,2,...$

b Stel een directe formule op voor de huur b_n van Bas in jaar n met $n = 0,1,2,...$

c Wie betaalt er in 2035 de meeste huur?

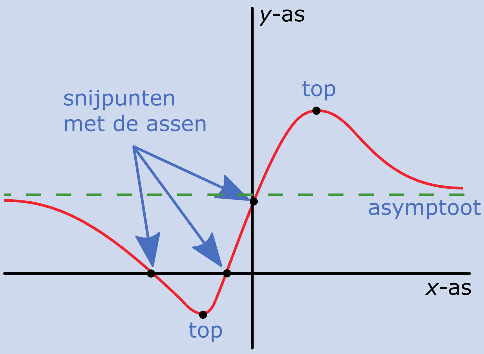
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De grafiek van **functie** met voorschrift $f(x)$ heeft karakteristieken zoals: de snijpunten met de assen, de asymptoten en de toppen. Het is nuttig deze karakteristieken goed in beeld te krijgen.

De grafiek van f kan op vier manieren ontstaan uit een standaardfunctie:

- verschuiven in de y-richting: $f(x) + a$ ontstaat door de grafiek van f met a omhoog te verschuiven;
- verschuiven in de x-richting: $f(x + a)$ ontstaat door de grafiek van f met a naar links te verschuiven;
- herschalen in de y-richting: $a \cdot f(x)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as met factor a te vermenigvuldigen;
- herschalen in de x-richting: $f(ax)$ ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{a}$ te herschalen.



Figuur 4

Een **rij** is een rekenmodel waarin je met vaste stappen rekent. Omschrijf een rij als: u_n of $u(n)$, waarin n het nummer van de term aangeeft. Geef daarbij aan of n bij 0 of bij 1 begint. De beginwaarde van de rij wordt aangeduid met b. Je kunt een rij op twee manieren beschrijven:

- met een recursieformule waarmee je elke term berekent uit de voorgaande.
- met een directe formule waarmee je elke term direct berekent.

Er worden soorten rijen onderscheiden. Bijvoorbeeld:

- een rekenkundige rij is een rij waarbij elke term ontstaat door een vast getal a bij de vorige op te tellen of af te trekken;
- een meetkundige rij is een rij waarbij elke term ontstaat door de vorige met een vast getal r te vermenigvuldigen.

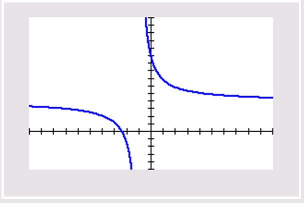
Een rij kan op de grafische rekenmachine worden ingevoerd. Hiermee kunnen andere termen in de rij berekend worden, en vergelijkingen en ongelijkheden worden opgelost.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{340}{2x+3} + 80$.

- Bepaal de karakteristieken van f en plot de grafiek.
- Los op: $f(x) = 100$.

Antwoord



Figuur 5

- Voer in: $y_1 = \frac{340}{2x+3} + 80$.
  Aan de formule zie je dat voor heel grote waarden van x geldt $y_1 \approx 80$. Verder mag $2x + 3$ niet 0 zijn, dus $x = -1{,}5$ is vermoedelijk een verticale asymptoot. Hierop baseer je de vensterinstellingen, bijvoorbeeld: $-15 \leq x \leq 15$ en $-100 \leq y \leq 300$.
  Nu kun je de karakteristieken bepalen.
  Het snijpunt met de y-as is $\left(0{,}193\frac{1}{3}\right)$ ($x = 0$ invullen).
  Het snijpunt met de x-as vind je door op te lossen

$$\begin{aligned} \frac{340}{2x+3} + 80 &= 0 \\ \frac{340}{2x+3} &= -80 \\ 2x + 3 &= \frac{340}{-80} = -4{,}25 \\ x &= \frac{-6{,}25}{2} = -3{,}125 \end{aligned}$$

  Het snijpunt met de x-as is $(-3{,}125; 0)$.
  De verticale asymptoot is $x = -1{,}5$.
  De horizontale asymptoot is $y = 80$.
- Vervolgens moet je $f(x) = 100$ oplossen.
  Dit kan op dezelfde manier als bij het oplossen van $f(x) = 0$, je vindt $x = 7$.
  Deze oplossing kun je ook met de GR vinden.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Los zelf de vergelijking $f(x) = 100$ algebraïsch op.

b Hoe is de grafiek van f te herleiden uit die van $y = \frac{1}{x}$?

Opgave 6

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{475}{4-1{,}5x} - 50$.

a Bepaal de karakteristieken van f.

b Plot de grafiek van f zodat alle karakteristieken goed in beeld zijn.

c Los op: $f(x) = -200$.

d De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{3}$ te herschalen en vervolgens de grafiek 25 omlaag te verschuiven.
Geef de formule van $g(x)$.

Voorbeeld 2

Een bioloog houdt de populatiegroei van kikkers in een natuurgebied in de gaten. Als er te veel kikkers zijn, is er sprake van een plaag en moet er worden ingegrepen. Er wordt gesproken over een plaag wanneer het aantal kikkers meer dan 400000 bedraagt.

jaar	*aantal kikkers* ($x1000$)
1990	212
1995	230
2000	250
2005	272
2010	295
2015	320

Tabel 1

Bekijk de tabel met meetgegevens van 1990 t/m 2015.

- De aantallen kikkers in de tabel vormen rij u_n. Zoek uit of dit (bij benadering) een rekenkundige of meetkundige rij is en stel een recursieformule op bij rij u_n. Neem $n = 0$ in 1990.
- Stel een directe formule op bij rij u_n en bereken in welk jaar er een kikkerplaag zal zijn als de groei op deze manier door gaat.

Antwoord

- $230 - 212 = 18$, $250 - 230 = 20$ en $272 - 250 = 22$.
  u is geen rekenkundige rij, want de verschillen zijn niet constant.
  $\frac{230}{212} \approx 1{,}08$, $\frac{250}{230} \approx 1{,}09$ en $\frac{272}{250} \approx 1{,}09$.
  u is bij benadering een meetkundige rij met een groeifactor per vijf jaar van ongeveer 1,08.
  De groeifactor per jaar is ongeveer $1{,}08^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}02$.
  De recursieformule is dus $u_n = u_{n-1} \cdot 1{,}02$ met $u_0 = 212$.
- De directe formule wordt $u_n = 212 \cdot 1{,}02^n$, want er is sprake van exponentiële groei.
  De vergelijking $212 \cdot 1{,}02^n = 400$ geeft $1{,}02^n = \frac{400}{212}$ en $n = {}^{1{,}02}\log\left(\frac{400}{212}\right) \approx 32$.
  In 2022 zal er een kikkerplaag zijn. Deze oplossing kun je ook met de grafische rekenmachine vinden.

Opgave 7

Bekijk de tabel met het aantal inschrijvingen voor een congres. Er is ruimte voor 500 inschrijvingen.

tijdstip	00:00 uur	04:00 uur	08:00 uur	12:00 uur	16:00 uur	20:00 uur
aantal	25	61	97	132	168	205

Tabel 2

a De aantallen inschrijvingen in de tabel vormen rij u_n.
Zoek uit of rij u_n (bij benadering) een rekenkundige of een meetkundige rij is.

b Stel een recursieformule op bij rij u_n. Neem $n = 0$ om 00:00 uur.

c Bereken met de recursieformule het aantal inschrijvingen om 02:00 uur.

d Stel een directe formule op bij rij u_n. Is dit een lineaire formule of een exponentiële formule?

e Bereken na hoeveel uur de inschrijving voor het congres gesloten wordt als de groei op deze manier doorgaat.

Opgave 8

Schrijf de recursieformules om naar directe formules.

a $u_n = u_{n-1} + 44$ met $u_0 = 12$. Begin te nummeren bij $n = 0$.

b $u_n = u_{n-1} \cdot 15$ met $u_0 = 2$. Begin te nummeren bij $n = 0$.

c $u_n = u_{n-1} - 35$ met $u_1 = 3000$. Begin te nummeren bij $n = 1$.

d $u_n = u_{n-1} \cdot 0{,}8$ met $u_1 = 5$. Begin te nummeren bij $n = 1$.

Opgave 9

Schrijf de directe formules om naar recursieformules.

a $u_n = 3 + \frac{1}{3} \cdot n$ met $n = 0,1,2,...$

b $u_n = 1200 + 77 \cdot (n - 1)$ met $n = 1,2,3,...$

c $u_n = 200 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$ met $n = 0,1,2,...$

d $u_n = 50 \cdot 0{,}75^{n-1}$ met $n = 1,2,3,...$

Verwerken

Opgave 10

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die zaden nodig hebben om voor 50% te ontkiemen. Proefondervindelijk is er een verband gebleken tussen de temperatuur T in °C en de kiemtijd K in dagen. Dit verband wordt gegeven door: $K = \frac{89}{T-2}$.

a Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen tien dagen ontkiemd?

b Welke waarden van T zijn zinvol?

c Wat is er aan de hand bij $T = 2$ en bij $K = 0$?

d Welke waarden kan K aannemen?

Opgave 11

Gegeven is de rij u_n waarin elke term 6 meer is dan de vorige term.
De vierde term in de rij is 55.

a Is u_n een rekenkundige rij of een meetkundige rij? Licht je antwoord toe.

b Maak een tabel bij de rij met een nummering die begint bij 0.

c Bepaal $u(8)$.

d Stel de directe formule en de recursieformule op.
Begin de nummering bij $n = 0$.

Opgave 12

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{690}{2+4 \cdot 0{,}8^x}$ nadert een bepaalde grenswaarde.

Beredeneer aan de hand van de functie of de bijbehorende grafiek stijgend of dalend is en wat de grenswaarde is.

Opgave 13

Een onderzoeker heeft gegevens verzameld over de gemiddelde lengte van jongetjes van 0 tot 10 jaar in Nederland. In figuur 1 zie je het verband tussen de gemiddelde lengte L en de leeftijd j.

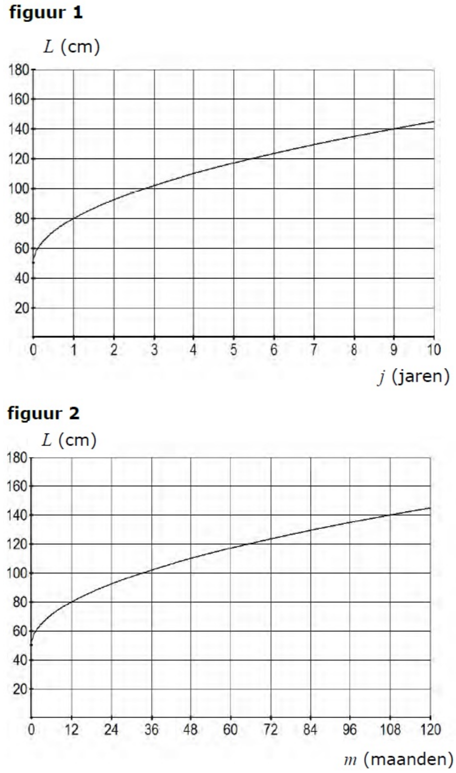
De formule die het verband tussen j en L beschrijft is $L = p + q \cdot \sqrt{j}$ waarin p en q getallen zijn.

a Bereken de waarden van p en q.

De onderzoeker is vooral geïnteresseerd in het verband tussen lengte en leeftijd in de eerste maanden na de geboorte. Zij maakt daartoe de grafiek van figuur 2.

b Teken met behulp van de formule een grafiek van het verband tussen de gemiddelde lengte L en de leeftijd m in maanden voor het eerste levensjaar. Neem op de horizontale as 1 cm voor elke maand en op de verticale as 1 cm voor elke 5 cm lengte (gebruik een scheurlijn).

c Uit de gegeven formule die het verband tussen L en j beschrijft, is een vergelijkbare formule af te leiden van het verband tussen L en m.
Stel een formule op die het verband tussen L en m beschrijft.



Figuur 6

Opgave 14

Beleggingsmaatschappijen zoeken steeds naar nieuwe manieren om geld te beleggen. Eén van die manieren is het beleggen in bomen. Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een folder het volgende.

Uw belegging groeit vanzelf
De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant. Hoe ouder de bomen, hoe langer en dikker ze worden. Voordat de bomen gekapt worden, groeien ze voortdurend volgens de formules:
$L = 0{,}75 \cdot t$ en $D = 0{,}0042 \cdot t + 0{,}072$
Hierbij is t de tijd in jaren na het plantmoment, L de lengte van een boom in meter en D de stamdiameter in meter.
De houtopbrengst wordt berekend met de formule:
$M = 0{,}16 \cdot D^2 \cdot L$
Hierin is M het aantal m^3 benutbaar hout van de boom.

De formules voor L en D zijn benaderingen van de werkelijke groei. Direct na het planten passen de formules nog niet zo goed bij de echte groei van de bomen. Pas vanaf het moment dat volgens de formules de diameter van de Labironia-boom 5% bedraagt van de lengte van een Labironia-boom, gelden de formules.

a Vanaf welk moment na het plantmoment gelden de formules?

b Een Labironia-boom van 15 jaar oud levert meer m^3 benutbaar hout op dan een van 8 jaar oud. Bereken hoeveel m^3 het verschil bedraagt.
Geef je antwoord in drie decimalen.

Ook is het zo dat de groei van oudere bomen van deze soort niet volgens de formules plaats zal vinden. Omdat alle bomen toch op een bepaald vastgesteld moment na het planten gekapt zullen worden, is het in deze opgave niet van belang dat de groei op zeker moment niet meer volgens de formules verloopt. De 960 bomen op één perceel worden niet alle op hetzelfde moment gekapt. Dat kappen gebeurt in verschillende rondes. De laatste ronde van dat kappen, het moment dus dat alle bomen gekapt zijn, vindt plaats op het moment dat een Labironia-boom een diameter heeft van 0,156 m.

c Bereken de lengte van een Labironia-boom op het moment van de laatste kapronde.

(naar: examen vwo wiskunde A in 2007, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 15: Bezonning (2)

Bij het ontwerpen van gebouwen besteedt men aandacht aan de mogelijke bezonning. Daarbij gaat men uit van een altijd wolkenloze hemel. In deze opgave beperken we ons tot gebouwen met rechte verticale gevels die niet in de schaduw van andere gebouwen staan. Verder gaan we uit van een jaar met 365 dagen. Bekijk de tabel met het aantal dagen per kalendermaand.

maand	*aantal dagen*	*maand*	*aantal dagen*	*maand*	*aantal dagen*
januari	31	mei	31	september	30
februari	28	juni	30	oktober	31
maart	31	juli	31	november	30
april	30	augustus	31	december	31

Tabel 3

Voor het dagelijkse aantal uren zonneschijn B bij een altijd wolkenloze hemel geldt de formule:
$B = 12{,}3 + 4{,}6 \cdot \sin(0{,}0172 \cdot (n - 80))$
Hierin is n het nummer van de dag. Er geldt $n = 1$ voor 1 januari.

a Toon door berekening aan dat 13 april de eerste dag van het jaar is waarop de zon langer dan 14 uur schijnt.

b Er is een groot verschil tussen het maximale en het minimale dagelijkse aantal uren zonneschijn. Bereken aan de hand van de formule voor B dit verschil in minuten nauwkeurig.

(naar: examen vwo wiskunde A in 1991, eerste tijdvak)

Opgave 16: Al doende leert men

In de Amerikaanse industrie is ooit onderzocht hoe snel werknemers leren wanneer zij een handeling vaker verrichten. Van een groot aantal werknemers is bijgehouden hoeveel tijd ze nodig hadden om een bepaalde handeling voor de eerste keer te verrichten, hoeveel tijd voor de tweede keer, enzovoort. Zo bleken werknemers 16 minuten nodig te hebben om handeling A voor de eerste keer te verrichten. Bij de tweede keer was die handelingstijd 12,8 minuten. Dus wanneer een werknemer handeling A twee keer heeft uitgevoerd, is zijn gemiddelde handelingstijd 14,4 minuten. Bekijk deze $\frac{16+12{,}8}{2} = 14{,}4$ minuten in de tabel. De andere waarden in deze tabel zijn op een vergelijkbare manier berekend.

aantal keren dat handeling A is verricht (n)	1	2	3	4	5	6
gemiddelde handelingstijd (min)	16	14,4	13,1	12,1	11,3	10,7

Tabel 4

a Met behulp van de tabel kun je berekenen dat een werknemer 8,1 minuten nodig heeft om handeling A voor de vijfde keer te verrichten.
Geef zo'n berekening.

Om de gemiddelde handelingstijd H_n uit te rekenen voor meer dan zes handelingen is het handig te beschikken over een formule voor H_n. Hiertoe zijn verschillende pogingen ondernomen. Eén zo'n poging resulteerde in de formule:
$H_n = 0{,}14n^2 - 2n + 17{,}8$
Deze formule komt redelijk overeen met de gegevens van de tabel voor $n = 1$ tot en met $n = 6$.

b Bereken het grootste verschil tussen de uitkomsten uit de tabel en de bijbehorende waarden van H_n.

c Voor grote waarden van n is de formule voor H_n echter niet geschikt om de gemiddelde handelingstijd te beschrijven. Leg uit waarom de formule voor H_n niet geschikt is.

Het is niet zo eenvoudig een formule voor H_n te vinden die wel voldoet. Toch kun je bijvoorbeeld de gemiddelde handelingstijd na tien handelingen uitrekenen. Daarbij maak je gebruik van T_n, de tijd die een werknemer nodig heeft om handeling A voor de n-de keer te verrichten. T_n kan goed worden benaderd met de formule:
$T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$
In deze formule is T_n in minuten.
Inderdaad levert deze formule $T_1 \approx 16$ en $T_2 \approx 12{,}8$.
Met deze formule kun je ook andere handelingstijden uitrekenen en dus ook gemiddelde handelingstijden berekenen.

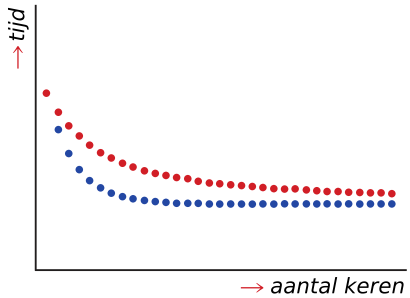
d Bereken hoe groot de gemiddelde handelingstijd is wanneer een werknemer tien keer handeling A heeft uitgevoerd.

e Als je kijkt naar de formule $T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$, dan kun je constateren dat T_n steeds kleiner wordt als n groter wordt. Op de lange duur komt T_n echter niet onder een bepaalde grens.
Hoe groot is die grens? Licht je antwoord toe.

Bekijk de figuur met schetsen van de grafieken van de handelingstijd en de gemiddelde handelingstijd in één assenstelsel. Naar aanleiding van deze grafieken maakt iemand de volgende twee opmerkingen:

1. Eén van beide grafieken zal altijd boven de andere grafiek liggen.
2. De twee grafieken komen steeds dichter bij elkaar en er zal op den duur geen echt verschil meer tussen beide grafieken te zien zijn.

Door redeneren zonder rekenen kun je onderzoeken of deze opmerkingen waar zijn of niet.



Figuur 7

f Onderzoek op deze manier of de beweringen waar zijn.

(naar: examen vwo wiskunde A1,2 in 2004, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 17

Je kent de normale verdeling uit de kansrekening wel. De bijbehorende normaalkromme is de grafiek van een functie f. Bij een gegeven standaardafwijking σ en een gegeven gemiddelde μ geldt daarvoor de formule

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Neem $\mu = 30$ en $\sigma = 2$.

a Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van de standaardnormaalkromme
$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$?

b Plot de grafiek van f en bepaal de karakteristieken ervan.

c Los op $f(x) \geq 0{,}15$.
Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.
Waarom heeft dit voor de wiskundige statistiek geen enkele betekenis?

Opgave 18

Iemand leent voor het kopen van een appartement € 90000 tegen een rente van 2,5% per jaar (voor het eerst te betalen aan het eind van het eerste jaar). Zij wil dit bedrag in 10 jaar inclusief rente terugbetalen in vaste jaarbedragen A.

a Laat zien dat dit betekent dat
$90000 \cdot 1{,}025^{10} - A \cdot \left(1{,}025^9 + 1{,}025^8 + \ldots + 1{,}025^2 + 1{,}025\right) = 0$.

b Bereken de hoogte van het vaste jaarbedrag.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.