5.1 Evenredig en lineair

Inleiding

Je hebt al kennis gemaakt met diverse soorten verbanden, beschreven door formules. Recht evenredigheid en omgekeerd evenredigheid komt veel voor. Daarbij horen lineaire en gebroken verbanden. De formules daarvan zijn betrekkelijk eenvoudig en ze worden daarom veel gebruikt, bijvoorbeeld bij het vergelijken van autokosten.

Figuur 1 bron: anwb.nl

Je leert in dit onderwerp

- recht evenredige, lineaire, omgekeerd evenredige en hyperbolische verbanden herkennen en gebruiken;
- lineair interpoleren en extrapoleren.

Voorkennis

- werken met lineaire verbanden, waaronder recht evenredige verbanden;
- werken met gebroken functies, waaronder omgekeerd evenredige verbanden.

Verkennen

Opgave V1

Iemand heeft een eigen auto en stelt de autokosten per jaar K alleen afhankelijk van het aantal gereden kilometers g. Ga uit van een gemiddeld verbruik van 1 liter brandstof op 20 kilometer en een gemiddelde brandstofprijs van € 1,670 per liter.

a Zijn K en g recht evenredig, omgekeerd evenredig of nog iets anders?

Daarnaast zijn er nog jaarlijkse vaste kosten voor de auto.

- afschrijving € 1040,00
- garagekosten € 425,00
- wegenbelasting € 296,00
- premie verzekering € 480,00

Die wil je ook meerekenen.

b Zijn K en g recht evenredig, omgekeerd evenredig of nog iets anders?

Het verbruik van een auto is het aantal kilometer dat een auto kan rijden op 1 liter brandstof. Het verbruik kan variëren afhankelijk van onder andere de snelheid waarmee de auto rijdt en de weersomstandigheden. Er is een verband tussen het (gemiddelde) verbruik v en de autokosten per jaar K.

c Zijn K en v recht evenredig, omgekeerd evenredig of nog iets anders?

Uitleg 1

De kosten die het bezit van een auto jaarlijks met zich meebrengt hangen onder andere af van het aantal gereden kilometer, het verbruik per kilometer, de brandstofprijs, de jaarlijkse afschrijving, de garagekosten, de wegenbelasting en de premie van de verzekering.

Figuur 2 bron: anwb.nl

Deze autokosten per jaar zijn:

- recht evenredig, als je de kosten alleen afhankelijk stelt van het aantal gereden kilometers met een vast (gemiddeld) verbruik per kilometer en een vaste (gemiddelde) brandstofprijs.
  Bij een recht evenredig verband hoort een formule van de vorm: $y = ax$.
  Hierin is a de evenredigheidsconstante.

- lineair, als je de kosten afhankelijk stelt van het aantal gereden kilometers en als je ook de vaste kosten meetelt zoals jaarlijkse afschrijving, de garagekosten, de wegenbelasting en de premie van de verzekering.
  Bij een lineair verband hoort een formule van de vorm: $y = ax + b$.
  Hierin is b het begingetal en a de richtingscoëfficiënt van de grafiek.
- omgekeerd evenredig, als je de kosten alleen afhankelijk stelt van het verbruik, namelijk het aantal kilometers dat de auto kan rijden op 1 liter brandstof met een vast (gemiddeld) aantal gereden kilometer per jaar en een vaste (gemiddelde) brandstofprijs.
  Bij een omgekeerd evenredig verband hoort een formule van de vorm: $y = \frac{a}{x}$
  Hierin is a een constante.
- hyperbolisch, als je niet alleen de kosten afhankelijk stelt van het verbruik, maar ook de vaste kosten meetelt zoals jaarlijkse afschrijving, de garagekosten, de wegenbelasting en de premie van de verzekering.
  Bij een hyperbolisch verband hoort een formule van de vorm: $y = \frac{a}{x} + b$
  Hierin zijn a en b constanten.

Opgave 1

Iemand heeft een eigen auto en stelt de autokosten per jaar K alleen afhankelijk van het aantal gereden kilometers g, uitgaande van een gemiddeld verbruik van 1 liter brandstof op 20 kilometer en een gemiddelde brandstofprijs van € 1,670 per liter.

a Als hij het ene jaar twee keer zo veel kilometers rijdt als het andere jaar, wat gebeurt er dan met de autokosten per jaar?

b Wat voor soort verband is er tussen K en g?

c Stel een formule op bij het verband tussen K en g.

d De jaarlijkse autokosten waren in 2016 € 1806,44.
Bereken hoeveel kilometer hij in 2016 heeft gereden.

e In 2017 wil hij niet meer dan € 1750,00 aan autokosten kwijt zijn.
Hoeveel kilometer kan hij maximaal rijden in 2017?

Opgave 2

Iemand stelt de autokosten per jaar K niet alleen afhankelijk van het aantal gereden kilometers g bij een gemiddeld verbruik van 1 liter brandstof op 20 kilometer en een gemiddelde brandstofprijs van € 1,670 per liter.
Zij rekent ook de jaarlijkse vaste kosten voor de auto:

- afschrijving € 1040,00
- garagekosten € 425,00
- wegenbelasting € 296,00
- premie verzekering € 480,00

a Wat voor soort verband is er tussen K en g?

b Stel een formule op bij het verband tussen K en g.

c Ze wil in 2018 niet meer dan € 4000,00 aan autokosten kwijt zijn.
Hoeveel kilometer kan ze maximaal rijden in 2018?

Opgave 3

Het verbruik van een auto is het aantal kilometer dat een auto kan rijden op 1 liter brandstof. Het verbruik kan variëren afhankelijk van onder andere de snelheid waarmee de auto rijdt en de weersomstandigheden. Er is een verband tussen het (gemiddelde) verbruik v en de autokosten per jaar K.

a Als v twee keer zo klein wordt, wat gebeurt er dan met K?

b Wat voor soort verband is er tussen K en v?

Een autobezitter stelt de autokosten per jaar K alleen afhankelijk van het gemiddelde verbruik v. Hij gaat uit van een gemiddeld aantal gereden kilometers per jaar van 20000 km en een gemiddelde brandstofprijs van € 1,620 per liter. Als deze auto een gemiddeld verbruik heeft van 1 liter op 18 kilometer, dan zijn de autokosten per jaar € 1800,00.

c Stel een mogelijke formule op bij het verband tussen K en v.

d Bereken de jaarlijkse autokosten als deze auto een gemiddeld verbruik heeft van 1 liter op 20 kilometer.

e Bereken het gemiddelde verbruik van de auto als de jaarlijkse autokosten € 1705,00 zijn.

f Daarnaast zijn er jaarlijks € 2150,00 aan vaste kosten voor de auto. Pas de formule uit c zo aan, dat daarin deze vaste kosten worden meegenomen.
Wat voor soort verband beschrijft deze formule?

Uitleg 2

Je ziet hier een tabel van het aantal leerlingen in de brugklas van een school gedurende een aantal jaar.

tijd (jaar)	1995	2000	2005	2010	2015
aantal leerlingen	88	95	89	102	114

Tabel 1

Het aantal leerlingen dat in 2002 in de brugklas zat, kun je schatten.
In 2000 zaten er 95 leerlingen in de brugklas en in 2005 waren dat er 89.

In de tussentijd neem je aan dat het aantal daalde met $\frac{95-89}{5} = 1{,}2$ leerlingen per jaar.

In 2002 zaten er dan naar schatting $95 - 2 \cdot 1{,}2 = 92{,}6 \approx 93$ leerlingen in de brugklas.

Deze manier van schatten heet lineair interpoleren. Je gaat er vanuit dat tussen de twee meetpunten de waarden steeds gelijkmatig toe- of afnemen.

Het aantal leerlingen dat in 2028 in de brugklas zal zitten, kun je ook schatten.
In 2010 zaten er 102 leerlingen in de brugklas en in 2015 waren dat er 114.

Dat is per jaar een stijging van $\frac{114-102}{5} = 2{,}4$ leerlingen.

In 2028 zitten er naar schatting $114 + 13 \cdot 2{,}4 \approx 145$ leerlingen in de brugklas.

Deze manier van schatten heet lineair extrapoleren. Je neemt weer aan dat de waarden steeds gelijkmatig blijven toe- of afnemen.

Het verschil tussen interpoleren en extrapoleren is dat je in het eerste geval een schatting geeft voor een waarde binnen de tabel (in 2002) en in het tweede geval voor een waarde buiten de tabel (in 2028).

Opgave 4

Bekijk de tabel in **Uitleg 2**. Schat de volgende aantallen door middel van lineair interpoleren/extrapoleren.

a Het aantal leerlingen dat in 1997 in de brugklas zat.

b Het aantal leerlingen dat in 2022 in de brugklas zal zitten.

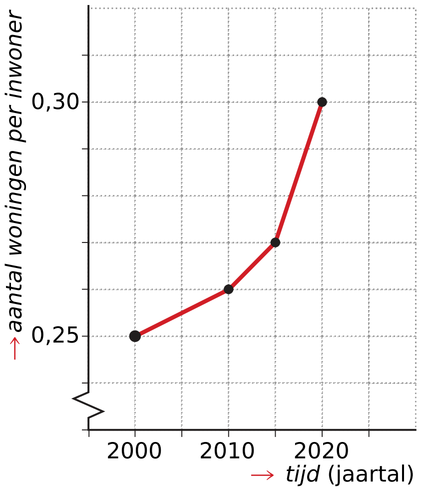
c Het aantal leerlingen dat in 1993 in de brugklas zat.

Opgave 5

Bekijk de grafiek met het aantal woningen per inwoner in de periode 2000-2020 in de gemeente D.

a Schat door lineair interpoleren het aantal woningen per inwoner in 2005.

b Schat door lineair extrapoleren het aantal woningen per inwoner in 2024.



Figuur 3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als er een **lineair** verband bestaat tussen y en x heeft de bijbehorende formule de vorm $y = ax + b$, waarin:

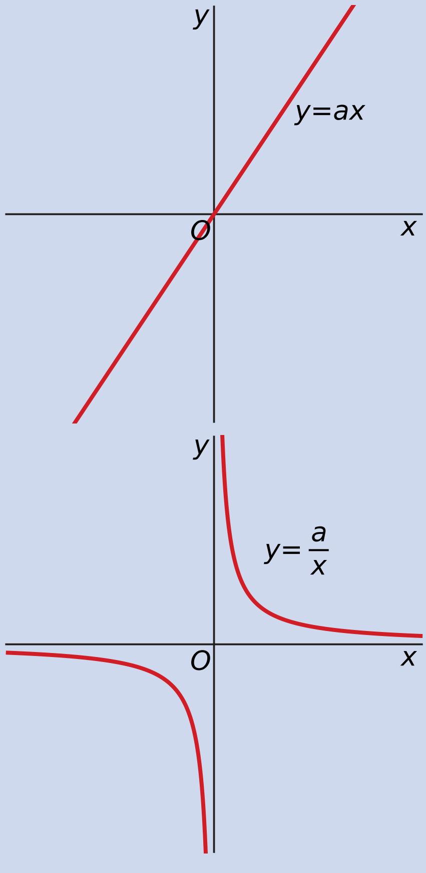
- a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt is van de rechte lijn die de grafiek van dit verband is;
- b het begingetal is: de waarde van y bij het snijpunt met de y-as.

Als $b = 0$ gaat de lijn door de oorsprong van het assenstelsel. De formule heeft dan de vorm $y = ax$ en in dat geval is y **recht evenredig** met x.
Er geldt: als x k keer zo groot wordt, wordt y ook k keer zo groot.

Twee variabelen x en y zijn **omgekeerd evenredig** wanneer geldt: als x k keer zo groot wordt, wordt y k keer zo klein. Bij een omgekeerd evenredig verband hoort een formule van de vorm: $y = \frac{a}{x}$.
In de figuur is de grafiek van een omgekeerd evenredig verband getekend.

Waarden die niet in de tabel of grafiek voorkomen, kun je alleen schatten. Dat kan door:

- **lineair interpoleren**: het schatten van punten tussen twee meetpunten, waarbij je aanneemt dat tussen die twee meetpunten de waarden steeds gelijkmatig toe- of afnemen.
- **lineair extrapoleren**: het schatten van punten buiten het gebied met meetpunten, waarbij je ook aanneemt dat de waarden steeds gelijkmatig blijven toe- of afnemen.



Figuur 4

Voorbeeld 1

De kosten voor leidingwater bedragen in een bepaalde regio € 1,25 per m^3. Daarnaast zijn er ook kosten voor het gebruik van de waterleiding, het zogenoemde vastrecht. Het vastrecht in deze regio is € 65,00 per jaar.

Beschrijf in de volgende gevallen het soort verband en stel een formule ervan op.

- de jaarlijkse kosten van het verbruik K_j en het jaarverbruik a in m^3.
- de totale jaarkosten voor leidingwater K en het jaarverbruik a in m^3.
- de kosten per m^3 k en het jaarverbruik a in m^3.

Antwoord

- Elke extra m^3 water die je verbruikt, zorgt voor een toename van K_j met € 1,25. Deze formule beschrijft een recht evenredig verband tussen a en K_j.

  Hierbij past de formule $K_j = 1{,}25a$.
- De formule voor de totale kosten voor leidingwater is daarmee $K = K_j + 65$ en dus $K = 1{,}25a + 65$. Er is dus sprake van een lineair verband. De grafiek wordt daarom een rechte lijn door het punt (0,65) en bijvoorbeeld (1; 66,25).
- De kosten per m^3 k bereken je door de totale jaarlijkse kosten K te delen door het jaarverbruik a.

  $k = \frac{K}{a} = \frac{1{,}25a+65}{a} = \frac{65}{a} + 1{,}25$

  Het verband tussen m en a is hyperbolisch.

Opgave 6

In een andere regio zijn de jaarlijkse kosten K_j voor het verbruik van water € 1,20 per m^3 en de vaste kosten K_v (het vastrecht) € 70,00 per jaar.

a Welke formule geldt voor de kosten van het verbruik K_j als functie van a, als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?

b Welke formule geldt voor de totale kosten K als functie van a, als a het jaarverbruik in m^3 voorstelt?

c Met hoeveel neemt K toe als a met 1 m^3 toeneemt?

d Hoeveel betaal je in deze regio als je geen water verbruikt?

e Een huishouden verbruikt in een bepaald jaar 195 m^3 water.
Hoeveel moeten ze dat jaar betalen?

f Welke formule, die van K_j of die van K, geeft een recht evenredig verband en waarom?

Opgave 7

Iemand uit Eindhoven rijdt regelmatig naar Maastricht. De afstand tussen Eindhoven en Maastricht is ongeveer 90 kilometer.

a Hoelang duurt de rit als er gemiddeld 100 kilometer per uur wordt gereden?

b Bereken de gemiddelde snelheid als de rit 1,5 uur duurt.

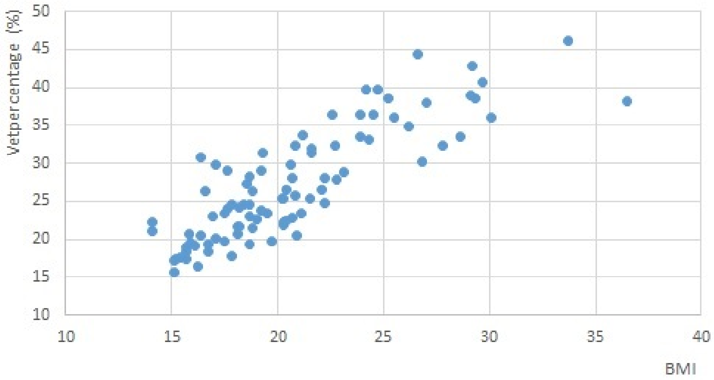
c Met welke formule kun je de gemiddelde snelheid berekenen als de reistijd bekend is? Gebruik de reistijd t in uur en de gemiddelde snelheid v in kilometer per uur.

d Geef een formule met t uitgedrukt in v.

e Voor welke waarden van t en v is deze formule bruikbaar?

Voorbeeld 2

Bekijk de puntenwolk BMI-Vetpercentage. Daarin zijn de resultaten weergegeven van een onderzoek onder 90 jongeren. BMI is een getal dat samenhangt met lengte en gewicht, vetpercentage is het percentage van het lichaamsgewicht dat bestaat uit vet.



Figuur 5

Er lijkt een verband te bestaan tussen de BMI b en het vetpercentage v.
Bij deze puntenwolk past een trendlijn door bijvoorbeeld (15,17) en (30,42).

Stel een formule op voor het lineaire verband tussen b en v.

Antwoord

De formule heeft de vorm: $v = pb + q$.

$p = \frac{\Delta b}{\Delta v} = \frac{42-17}{30-15} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

p invullen in de formule geeft: $v = \frac{5}{3}b + q$.
Vul één van beide punten in en je vindt $q = -8$.

De formule is: $v = \frac{5}{3}b - 8$.

Met behulp van de formule kun je het vetpercentage schatten van iemand met een BMI van bijvoorbeeld 21.

Opgave 8

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Waarom worden twee punten gekozen die ver uit elkaar liggen?

b Bereken met de formule een schatting van het vetpercentage van iemand met een BMI van 21.

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 2** nog eens.
Iemand neemt aan dat de trendlijn door (10,10) en (35,40) gaat.

a Stel een formule op voor zijn trendlijn.

b Welk vetpercentage krijgt iemand nu met een BMI van 21?

Voorbeeld 3

Bekijk de tabel van het CBS met het aantal daklozen in Nederland op 1 januari van elk jaar tussen 2009 en 2015.

Daklozen absoluut							
Perioden	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Persoonskenmerken	x 1000						
aantal personen	17,8	23,3	24,4	27,3	24,8	26,9	31,0
geslacht: mannen	14,2	17,6	19,7	22,5	19,9	21,4	25,3
geslacht: vrouwen	3,6	5,7	4,7	4,8	4,9	5,5	5,7
leeftijd: 18 tot 30 jaar	4,0	6,1	6,1	6,4	7,2	6,8	8,3
leeftijd: 30 tot 50 jaar	10,1	12,7	13,2	15,0	12,8	14,3	16,4
leeftijd: 50 tot 65 jaar	3,7	4,5	5,1	5,9	4,8	5,8	6,3

Figuur 6

Schat door middel van lineair extrapoleren het aantal daklozen met een leeftijd tussen de 30 en 50 jaar op 1 oktober 2016.

Antwoord

Op 1 januari 2014 waren er 14300 daklozen tussen de 30 en 50 jaar.
Op 1 januari 2015 waren dat er 16400.
In een jaar tijd is het aantal daklozen tussen de 30 en 50 jaar met $16400 - 14300 = 2100$ toegenomen.

Dat is een toename van $\frac{2100}{4} = 525$ per kwartaal.

Op 1 oktober is het derde kwartaal net voorbij.
Tussen 1 januari 2015 en 1 oktober 2016 zitten zeven kwartalen.
Op 1 oktober 2016 waren er naar schatting $16400 + 7 \cdot 525 = 20075$ daklozen van 30 tot 50 jaar.

Opgave 10

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

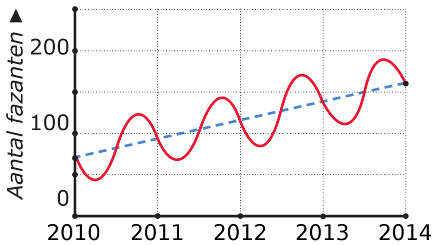
a Schat door middel van lineair interpoleren het aantal vrouwelijke daklozen op 1 april 2013.

b Schat door middel van lineair extrapoleren het aantal daklozen tussen de 18 en 30 jaar op 1 oktober 2016.

Opgave 11

Bekijk de grafiek van het aantal fazanten tussen 2010 en 2014. Hier is sprake van een duidelijke trend: het aantal fazanten in dit gebied neemt gestaag toe.

Bepaal het aantal fazanten in juli 2020 als deze trend zich voortzet.



Figuur 7

Verwerken

Opgave 12

In een winkelbedrijf wordt onderzocht hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat de volgende formule geldt: $a = \frac{500}{p}$.

Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro.

a Plot een grafiek waaruit je de verkoop kunt aflezen voor prijzen tussen de € 1,00 en € 5,00 per kilogram.

b Iemand zegt: “Een verdubbeling van de prijs zorgt voor een halvering van de verkoop.” Klopt dat?

A. De bewering is waar.
B. De bewering is niet waar.

c Klopt deze bewering met de formule: “Als de prijs vijf keer zo hoog wordt, wordt de verkoop vijf keer zo klein.”?

A. De bewering is waar.
B. De bewering is niet waar.

d Geef twee andere formules voor hetzelfde verband tussen a en p.

e In het bedrijf heeft men een voorraad van 300 kg tomaten. Deze tomaten zijn niet lang meer houdbaar en men wil er binnen een dag vanaf. Bereken de maximale prijs volgens de formule.

Een formule zoals $a = \frac{500}{p}$ is meestal slechts op een beperkt gebied bruikbaar. Dat kun je zien als je voor p extreme gevallen neemt.

f Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij een prijs van € 100,00? Zal dit in werkelijkheid ook zo zijn?

Opgave 13

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{2,25}{p} = 0,45$

b $4,50 + \frac{300}{k} = 4,70$

c $\frac{1200}{k+12} - 42 = 6$

Opgave 14

Een kaasboer houdt bij hoeveel kilo geraspte kaas hij per week verkoopt. Het blijkt dat de hoeveelheid k (kg) die hij verkoopt omgekeerd evenredig is met de prijs p per kilo. Bij een prijs van € 13,00 per kilo verkoopt hij 15 kg geraspte kaas.

a Stel een op formule die k uitdrukt in p.

b Bereken het aantal verkochte kilo’s kaas als de prijs € 10,00 per kilogram is.

Er is een nieuw restaurant in het pand naast de kaasboer geopend. De eigenaar van het restaurant neemt iedere week 15 kg kaas af. De prijs die hij betaalt, wordt in onderling overleg met de kaasboer bepaald.

c Bereken in de nieuwe situatie het aantal verkochte kilo’s als de prijs € 10,00 per kilo is.

d Welke nieuwe formule voor k geldt nu?

e Plot de grafiek van k en bepaal bij welke prijs per kilogram de verkoop per week 40 kg is.

f Bereken ook algebraïsch bij welke prijs de verkoop per week 40 kg is.

Opgave 15

Bekijk de tabel met het aantal personenauto's in Nederland in een aantal jaren.

jaar	1999	2005	2007	2008	2009	2010
aantal personenauto's	4100000	4300000	4350000	4410000	4500000	4660000

Tabel 2

a Bepaal door lineair interpoleren het aantal personenauto's voor het jaar 2000 en het jaar 2006.

b Bepaal door lineair extrapoleren de aantallen voor 2014 en 2016.

c In 1990 telde Nederland 14,89 miljoen inwoners.

Hoeveel auto's waren er per Nederlander in 1990?
Geef je antwoord in twee decimalen.

d Hoeveel Nederlanders waren er per auto in 1990?
Geef je antwoord in twee decimalen.

Opgave 16

Er bestaat een omgekeerd evenredig verband tussen x en y.
Als x toeneemt van $x = 10$ naar $x = 30$ dan neemt y af met 30.
Stel een formule op bij dit verband.

Toepassen

Opgave 17: Benzinetoerisme

Lees de tekst uit een artikel in een landelijk dagblad in augustus 2005.

> ..... De enige reden waarom de benzine in Nederland niet veel duurder mag zijn dan in België of in Duitsland is het benzinetoerisme. Hoe groter het prijsverschil, hoe meer kilometers mensen afleggen om goedkoop te tanken aan gene zijde. Stel de prijs in Nederland is € 3,00 per liter en die in Duitsland is € 1,50 per liter, dan levert een volle tank van 50 liter een voordeel op van € 75,00. Bij een verbruik van 1 op 10 betaalt een benzinetoerist 15 cent per kilometer aan benzine (de Duitse prijs) en kan hij voor het uitgespaarde bedrag 500 kilometer rijden, dat is 250 km heen en weer. Bij een dergelijk prijsverschil zou zelfs iemand uit Alkmaar nog in Duitsland kunnen gaan tanken, ware het niet dat hij met een halfvolle tank zou moeten vertrekken om de grens te halen en met een half lege thuis zou komen .....

Om meer inzicht te krijgen in de voor- en nadelen van tanken in het buitenland bekijk je in de vragen a en b een vereenvoudigd voorbeeld:
Jan gebruikt zijn auto voor het doen van boodschappen en voor het afleggen van familiebezoekjes in de directe omgeving. Hij woont op 100 km afstand van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation. Hij maakt een aparte rit als hij in het buitenland gaat tanken. Als hij in Nederland tankt, dan hoeft hij daar niet extra voor te rijden. Hij rijdt 1 op 10, dat wil zeggen dat zijn auto met 1 liter benzine 10 kilometer rijdt. Als hij tankt, dan tankt hij altijd precies 50 liter.

a Ga uit van de in het artikel genoemde benzineprijzen. Jan redeneert op de manier van het artikel: ‘mijn voordeel is € 2,00 per liter; zelfs als ik daar de kosten voor het heen en weer rijden van aftrek, heb ik nog voordeel’.
Laat met een berekening zien dat het voordeel van Jan per keer dat hij in het buitenland gaat tanken, volgens deze redenering, € 70,00 bedraagt.

Jan merkt al snel dat er iets mis is met zijn redenering. Hij is meer geld kwijt dan toen hij in Nederland tankte. Om een eerlijke vergelijking te maken tussen tanken in Nederland en tanken in het buitenland moet hij voor beide situaties de kosten berekenen per gebruikskilometer. Een gebruikskilometer is elke afgelegde kilometer die niet gereden wordt om te tanken. In Jans geval is er dus sprake van het afleggen van gebruikskilometers bij bijvoorbeeld familiebezoekjes of boodschappen doen.

b Hoe groot is het voordeel voor Jan per gebruikskilometer bij tanken in Nederland vergeleken met tanken in het buitenland? Licht je antwoord toe met een berekening.

Bekijk nu een wat algemenere situatie: de benzineprijs in Nederland noem je N (euro per liter), de benzineprijs in het buitenland noem je B (euro per liter) en de afstand tot het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation noem je x (km).
Voor het voordeel bij tanken in het buitenland V (euro) per gebruikskilometer geldt dan: $V = 0{,}0625 \cdot N - \frac{30 \cdot B}{480 - x}$

Ga ervan uit dat:

- auto's 1 op 16 rijden: elke auto rijdt 16 km op 1 liter benzine;
- een eigenaar van een auto bij een tankbeurt altijd 60 liter tankt;
- een eigenaar van een auto altijd een aparte rit maakt om in het buitenland te tanken;
- een eigenaar van een auto niet extra hoeft te rijden om in Nederland te tanken.

c Toon aan dat deze formule juist is.

Men wil de benzineprijs in Nederland zodanig vaststellen dat er geen voordeel bij tanken in het buitenland is voor mensen die 20 kilometer of verder van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation wonen. De benzineprijs in Nederland is dan een vast percentage hoger dan de benzineprijs in het buitenland ongeacht de benzineprijs in het buitenland.

d Toon dat aan.

e De literprijs van benzine verandert geregeld. Daarmee verandert ook de afstand tot het dichtstbijzijnde tankstation in het buitenland waarbij er geen voordeel of nadeel is om daar te gaan tanken.

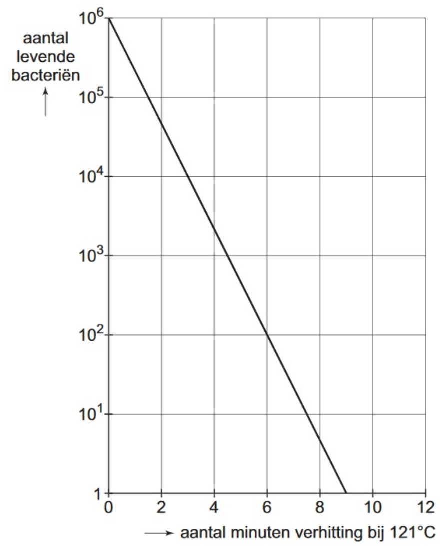
Toon aan dat uit $V = 0{,}0625 \cdot N - \frac{30 \cdot B}{480 - x}$ volgt dat deze afstand gelijk is aan: $480 \cdot \left(1 - \frac{B}{N}\right)$.

(naar: examen vwo wiskunde A in 2004, eerste tijdvak)

Opgave 18: Sterilisatie

Om voedingswaren tegen bederf te beschermen, worden ze tijdelijk verhit. Dit heet steriliseren. Er zijn verschillende sterilisatiemethodes. In deze opgave kijk je naar het sterilisatieproces bij twee soorten bacteriën. De temperatuur bij dat proces is 121 °C. Naarmate de bacteriën korter aan deze temperatuur zijn blootgesteld, zullen er meer bacteriën overleven. Bekijk de overlevingsgrafiek van een bepaalde bacterie.

Bij een overlevingsgrafiek heeft de verticale as altijd een logaritmische schaalverdeling. Het aantal bacteriën bij aanvang van het sterilisatieproces stelt men altijd op 1 miljoen. Ga er steeds van uit dat voor verschillende soorten bacteriën de overlevingsgrafieken rechte lijnen zijn indien de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft.



Figuur 8

Bij de grafiek hoort een formule van de vorm:
$N(t) = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$
Hierin is N het aantal bacteriën na t minuten en is r de sterftefactor. De sterftefactor is afhankelijk van het type bacteriën.

a Met behulp van de grafiek kun je berekenen dat de sterftefactor r van deze bacterie ongeveer gelijk is aan 2,2. Toon dat met een berekening aan.

De D-waarde is de tijd in minuten die nodig is om het aantal bacteriën te reduceren tot 10% van het oorspronkelijke aantal. Net als de sterftefactor is de D-waarde afhankelijk van de soort bacteriën.

b Bereken voor deze bacterie de D-waarde met behulp van de formule en leg uit hoe je deze D-waarde kunt controleren met behulp van de grafiek.

Men heeft ook van andere bacteriën de D-waarde bepaald. Voor deze bacterie is de D-waarde gelijk aan 2,55 minuten. Met dit gegeven kun je de overlevingsgrafiek van deze bacterie tekenen. Ook voor deze overlevingsgrafiek begin je weer met 1 miljoen bacteriën.

c Teken deze overlevingsgrafiek. Licht je werkwijze toe.

Voor elk type bacteriën kun je de D-waarde berekenen wanneer je de sterftefactor r kent. Daarvan heb je in b een voorbeeld gezien. Wanneer je dat voor een aantal typen bacteriën doet, blijkt dat D en r omgekeerd evenredig zijn.

d Toon aan, door gebruik te maken van de formule $N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2{,}2 \cdot t}$ dat tussen D en r een omgekeerd evenredig verband bestaat.

(naar: examen wiskunde A1,2 in 2006, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 19

De hoogte van geluid wordt bepaald door de frequentie. Hoe hoger de frequentie, hoe kleiner de golflengte. De frequentie wordt uitgedrukt in Hertz (Hz) en geeft het aantal trillingen per seconde aan. Weet je de frequentie f dan kun je de golflengte W (meter) berekenen: $W = \frac{330}{f}$

a Is er een omgekeerd evenredig verband tussen W en f?

A. ja
B. nee

b Een geluidsinstallatie kan geluiden van 15 Hz tot 30000 Hz produceren.
Welke golflengtes horen daarbij?

c Vleermuizen kunnen geluiden horen die wij niet horen. Soms wel geluiden met een frequentie van 120000 Hz. Is dit een hoog of juist laag geluid?

A. hoog geluid
B. laag geluid

d Welke golflengte heeft het geluid?

e Mensen kunnen geluiden onder de 20 Hz nauwelijks horen. Gaat het dan om bassen of hoge tonen?
Welke golflengte heeft zo'n geluid?

f Welke waarde benadert W als f heel groot wordt?

Opgave 20

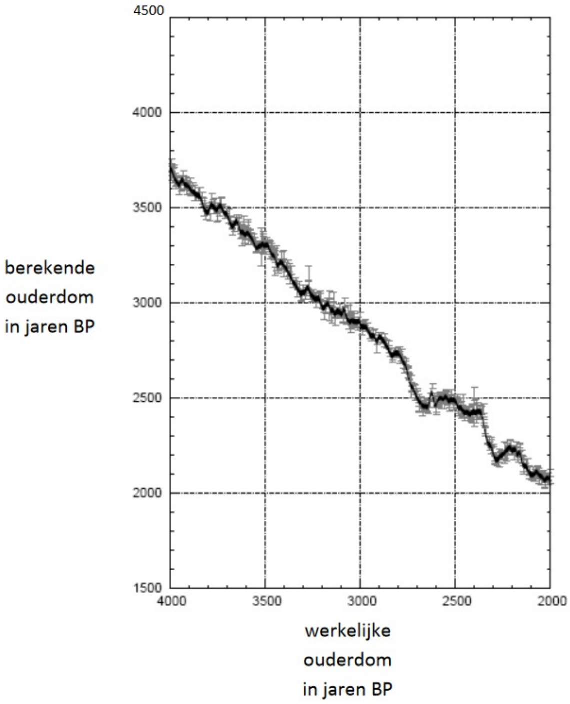
Koolstofdatering is een manier om de ouderdom van organisch materiaal te bepalen, bijvoorbeeld van hout, plantenresten of botten. In levende organismen komt naast de gewone, niet-radioactieve vorm van koolstof C-12 ook het radioactieve C-14 voor en wel in een bepaalde verhouding tot C-12. Na de dood van het organisme zal de hoeveelheid C-14 door radioactief verval exponentieel afnemen. Door te meten hoeveel C-14 er nog over is, kan men de ouderdom van het organische materiaal bepalen.

Voor de afname van de hoeveelheid C-14 geldt de volgende formule:

$t = \frac{\ln(Q) - 4{,}6052}{-0{,}00012}$

Hierin is Q de relatieve huidige hoeveelheid C-14 (als percentage van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14) en t de ouderdom van het organische materiaal in jaar.

De ouderdom die men met de formule $t = \frac{\ln(Q) - 4{,}6052}{-0{,}00012}$ berekent, is niet de werkelijke ouderdom. Bekijk de grafiek van een gedeelte van de zogenoemde ‘calibratiecurve’, dat is een grafiek waarmee men de berekende ouderdom kan omzetten in de werkelijke ouderdom. Deze calibratiecurve is gemaakt door de hoeveelheid C-14 te bepalen in materiaal waarvan de ouderdom ook op een andere manier bekend was.



Figuur 9

Langs de verticale as is de berekende ouderdom uitgezet. Deze wordt uitgedrukt in jaren BP, ‘Before Present’ (vóór heden). Hiermee wordt in dit verband altijd bedoeld: het aantal jaren vóór 1950, zodat het niet nodig is te weten in welk jaar het onderzoek is gedaan. Langs de horizontale as staat de werkelijke ouderdom, ook in jaren BP, dus in jaren vóór 1950.

Bij Vlaardingen is een kano gevonden, gemaakt van een uitgeholde boomstam. Om de ouderdom van deze kano te bepalen wordt de hoeveelheid C-14 gemeten. Het blijkt dat er nog 73,19% over is van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14.

a Bereken in welk jaar deze kano gemaakt is.

De curve van de figuur verloopt vooral rechtsonder grillig, doordat er voor deze periode veel materiaal beschikbaar was om de curve te maken. Voor het oudste deel van de calibratiecurve is niet zoveel materiaal beschikbaar. Voor een bepaald gedeelte heeft men alleen de volgende gegevens:

- Bij een berekende ouderdom van 20550 BP hoort een werkelijke ouderdom van 22650 voor Chr.
- Bij een berekende ouderdom van 19925 BP hoort een werkelijke ouderdom van 21925 voor Chr.

Men neemt aan dat de calibratiecurve tussen deze twee punten volgens een rechte lijn verloopt.

b Bereken, uitgaande van die rechte lijn, de werkelijke ouderdom van een stuk hout waarvan de berekende ouderdom 20100 BP is. Rond je antwoord af op tientallen jaren.

(bron: voorbeeldexamenopgaven wiskunde A in 2018)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.