4.3 Logaritmische functies

Inleiding

Je kunt functies van de vorm $f(x) = g^x$ differentiëren. En met behulp daarvan leer je nu logaritmische functies differentiëren. Daarbij maak je gebruik van de definitieformules van logaritmen.

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een logaritmische functie bepalen;
- van dergelijke functies de hellingen, de extremen en de buigpunten berekenen.

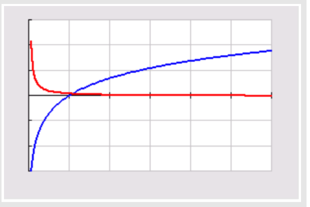
Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ met de bijbehorende afgeleide. Het gaat daarbij echter om benaderingen...



Figuur 1

a Breng de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ zelf in beeld.

b Waarom heeft de grafiek van deze afgeleide bij $x = 0$ een verticale asymptoot?

c De grafiek van de afgeleide heeft ook een horizontale asymptoot. Welke?

d Kun je een functievoorschrift voor de afgeleide verzinnen?

Uitleg

Bekijk de applet

De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ kun je vinden door te gebruiken dat $e^{\ln(x)} = x$.
Bekijk de functie $g(x) = e^{\ln(x)}$.
Omdat $g(x) = e^{\ln(x)} = e^u$ met $u = \ln(x)$ is $g'(x) = e^u \cdot u'(x)$.
Omdat $g(x) = x$ geldt ook $g'(x) = 1$.

Dus is $e^u \cdot u'(x) = 1$, dus $u'(x) = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$.

Conclusie: uit $u(x) = \ln(x)$ volgt $u'(x) = \frac{1}{x}$.

- De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Nu je de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ hebt gevonden, kun je die van $f(x) = {}^g\log(x)$ er uit afleiden door te gebruiken dat ${}^g\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)}$.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ bepaald. Differentieer de volgende functies en bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 10$.

a $f(x) = \ln(5x)$

b $f(x) = 3\ln(4 - x)$

c $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Opgave 2

Bepaal nu zelf de afgeleide van $f(x) = {}^{2}\log(x)$. Gebruik daarbij ${}^{2}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **afgeleide van de natuurlijke logaritmische functie** $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$.

De **afgeleide van de g-logaritme** $f(x) = {}^{g}\log(x)$ is hieruit af te leiden door te gebruiken dat ${}^{g}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)}$.

Je vindt:

Als $f(x) = {}^{g}\log(x)$, dan is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g) \cdot x}$.

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als $\ln(x)$ en/of ${}^{g}\log(x)$ voorkomen differentiëren met de differentieerregels. Daarmee kun je van functies die ingewikkelder zijn dan zuiver logaritmische functies ook de karakteristieken bepalen.

Voorbeeld 1

Differentieer de volgende functies:

- $f(x) = {}^{5}\log(x)$
- $f(x) = {}^{5}\log(2x)$
- $f(x) = x \cdot {}^{5}\log(2x)$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(0{,}5t)$

Antwoord

- $f(x) = {}^{5}\log(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\ln(5) \cdot x}$.
- $f(x) = {}^{5}\log(2x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\ln(5) \cdot 2x} \cdot 2 = \frac{1}{\ln(5) \cdot x}$.
- $f(x) = x \cdot {}^{5}\log(2x)$ geeft $f'(x) = 1 \cdot {}^{5}\log(2x) + x \cdot \frac{1}{\ln(5) \cdot x} = {}^{5}\log(2x) + \frac{1}{\ln(5)}$.
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot \log(0{,}5t)$ geeft $N'(t) = -2000 \cdot \frac{1}{\ln(10) \cdot 0{,}5t} \cdot 0{,}5 = -\frac{2000}{\ln(10) \cdot t}$.

Opgave 3

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 4

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = 1$.

a $f(x) = \ln(4x)$

b $f(x) = {}^{3}\log(x)$

c $f(x) = 5\log(x)$

d $f(x) = 50\ln(2x) + 100$

e $f(x) = {}^{2}\log\left(50 + x^2\right)$

f $f(x) = \ln\left(\frac{3}{x}\right)$

Voorbeeld 2

De **luchtdruk** p (in hectopascal hPa) hangt af van de hoogte k in km boven het aardoppervlak. In een luchtballon is de luchtdruk gemakkelijk te meten en wordt daaruit de hoogte berekend met de formule:

$h = -6{,}5 \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

Hierin is p_0 de luchtdruk op zeeniveau. Neem aan dat $p_0 = 1000$ hPa.
Bereken nu de hoogte en de snelheid waarmee $h(p)$ verandert als $p = 920$ hPa wordt gemeten.

Figuur 2

Antwoord

Als $p_0 = 1000$ hPa dan is $h = -6{,}5 \log(0{,}001p)$.

Als $p = 920$ hPa dan is $h \approx 0{,}235$ km.
Je zit dan 235 m boven zeeniveau.

$h'(p) = -6{,}5 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{1}{0{,}001p} \cdot 0{,}001 = \frac{-2{,}823}{p}$.

Als $p = 920$ hPa dan is $h' \approx -0{,}003$.
Bij een toename van de luchtdruk daalt de hoogte met ongeveer 3 m/hPa.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**. Neem nu aan dat $p_0 = 1020$ hPa.

a Bepaal voor deze waarde van p_0 de afgeleide van $h(p)$.

b Bereken h en de veranderingssnelheid van h als er 900 hPa wordt gemeten in de ballon.

c Hoe kun je aan de afgeleide van h zien dat de grafiek van h voor elke waarde van p dalend is?

Verwerken

Opgave 6

Bepaal $f'(x)$ en bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

a $f(x) = \ln(0{,}5x)$

b $f(x) = 4 \cdot {}^2\log(x) + 10$

c $f(x) = 200 \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

Opgave 7

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - \ln(2x)$.

a Maak de grafiek van f.
Welke asymptoot heeft deze grafiek?

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

c Voor welke x heeft de raaklijn aan de grafiek van f een richtingscoëfficiënt van -1?

Opgave 8

Bekijk de grafieken van $y_1 = {}^2\log(6 - x)$ en $y_2 = -{}^2\log(x)$ met domein $[0,6]$.

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de snijpunten van deze grafieken.

Op de grafieken van f en g liggen punten A en B beide met x-waarde k. Neem aan dat $1 < k < 4$.

b Toon aan dat de lengte van AB dan maximaal $2 \cdot {}^2\log(3)$ is.

Opgave 9

Bepaal $f'(x)$.

a $f(x) = \ln\left(x^2 - 4x\right)$

b $f(x) = {}^3\log\left(x^2 - 4x\right)$

Opgave 10

Voor het geluidsdrukniveau L geldt de formule:

$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

Hierin is I de geluidsintensiteit in W/m^2 (Watt per m^2). De grootheid L wordt veel gebruikt om geluidshinder te meten. Hij wordt uitgedrukt in decibel (dB).

a Bij de gehoorgrens ($L = 0$) is de geluidsintensiteit 10^{-12} W/m^2. Bij de pijngrens is de geluidsintensiteit 10 W/m^2. Bereken het geluidsdrukniveau bij de pijngrens.

Op een bepaalde afstand produceren twee personenauto's elk een geluidsdrukniveau van 80 dB. Nu kun je hun gezamenlijke geluidsdrukniveau niet krijgen door beide afzonderlijke geluidsdrukniveaus op te tellen. Dat kan echter wel met hun afzonderlijke geluidsintensiteiten.

b Bereken met behulp daarvan hun gezamenlijke geluidsdrukniveau.

De geluidshinder in de buurt van een snelweg hangt onder meer af van de afstand tot die weg. Voor niet te grote afstanden (van ongeveer 20 m tot 1000 m) wordt de formule: $L = L_0 - 10\log(2\pi R)$ gebruikt, waarin R de afstand tot de as van de weg in m is en L het geluidsdrukniveau in dB is. L_0 is het geluidsdrukniveau van het verkeer op de as van de weg.

c Als op 20 m een geluidsdrukniveau van 77 dB wordt gemeten, hoe groot is dan het geluidsdrukniveau op 100 m afstand van die weg?

d Op welke afstand van die weg is het geluidsdrukniveau 60 dB?

e Geef de formule voor L als functie van R als $L(20) = 80$ dB.

Toepassen

Opgave 11: Lengte in de loop van een dag

Een gezonde volwassene is 's morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie S:

$S(t) = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$

Hierin is:

- t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan
- S de verhouding tussen de lengte L van die persoon ten opzichte van zijn lengte L_0 bij het opstaan

Dus $S = \frac{L}{L_0}$.

Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm. Ga er van uit dat hij elke dag 16 uur actief is en verder slaapt.

a Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

b Laat met behulp van de afgeleide van $S(t)$ zien, dat deze functie dalend is.

Testen

Opgave 12

Bepaal van de volgende functies de afgeleide en los op $f'(x) = 10$.

a $f(x) = {}^{3}\log(x)$

b $f(x) = 2\log(11 - x)$

c $f(x) = \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

Opgave 13

In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken. Daarom stelde Gerlough de zogenaamde 'veilige norm' op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto's dat per uur passeert onder een maximum blijft. Dit maximum wordt aangegeven met N_{max} en is afhankelijk van de breedte van de weg. Gerlough beperkte zich in zijn onderzoek tot wegen met een breedte tussen 2 meter en 9 meter. Hij kwam tot de formule:

$$N_{\text{max}} = \frac{8289{,}3}{B} \cdot (1{,}778 - \log(B))$$

In deze formule is B de breedte van de weg in meter. Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model komt er enig inzicht in de veiligheid bij de aanleg van wegen.
Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm, betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto's mogen passeren dan bij een smalle weg. De grafiek van N_{max} moet dus dalend zijn. De formule voor N_{max} moet hiermee in overeenstemming zijn.

Toon met de afgeleide van de formule voor N_{max} (dus zonder gebruik van de grafische rekenmachine) aan dat de veiligheid bij een brede weg minder is dan bij een smalle weg.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren van logaritmische functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.