4.2 Exponentiële functies

Inleiding

Je hebt het getal e leren kennen en de natuurlijke logaritme.
Je kunt nu functies van de vorm $f(x) = \text{e}^x$ differentiëren. Maar je wilt ook $f(x) = g^x$ en alle functies waarin g^x in het voorschrift voorkomt kunnen differentiëren. Dan kun je van dit soort functies de karakteristieken berekenen met behulp van de afgeleide en de tweede afgeleide.

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepalen;
- de regels voor het differentiëren toepassen op functies waarin de onbekende in de exponent voorkomt;
- van dergelijke functies de hellingen, de extremen en de buigpunten berekenen.

Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken, ook met grondtal e;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten;
- de afgeleide van $f(x) = \text{e}^x$ bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Je wilt $f(x) = 2^x$ differentiëren.
Je weet dat de afgeleide van $y = \text{e}^x$ is $y' = \text{e}^x$.
Verder ken je de eigenschappen van exponenten en logaritmen.

a Laat zien, dat $f(x) = \text{e}^{\ln(2) \cdot x}$.

b Differentieer nu f met behulp van de kettingregel.

c Welke afgeleide heeft $f(x) = 2^x$?

Uitleg

Je wilt $f(x) = 2^x$ differentiëren.
Je weet dat de afgeleide van $y = \text{e}^x$ is $y' = \text{e}^x$.
Verder ken je de eigenschappen van exponenten en logaritmen.

Met behulp van deze eigenschappen kun je van grondtal veranderen.

In het algemeen is $g^{{}^g\log(2)} = 2$.

Dit geldt ook voor grondtal $g = \text{e}$, dus $\text{e}^{\ln(2)} = 2$.

Hieruit volgt: $f(x) = \left(\text{e}^{\ln(2)}\right)^x = \text{e}^{\ln(2) \cdot x}$.

Nu kun je f met behulp van de kettingregel differentiëren, het grondtal is namelijk e.
Je vindt: $f'(x) = \text{e}^{\ln(2) \cdot x} \cdot \ln(2)$.
En dit kun je weer schrijven als $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$.

Deze redenering kun je ook op elk ander grondtal toepassen. Doe je dit op grondtal g dan blijkt de afgeleide van $f(x) = g^x$ te zijn: $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de afgeleide van $f(x) = 2^x$ bepaald.

a Bepaal op dezelfde manier de afgeleide van $g(x) = 3^x$.

b Bepaal op dezelfde manier de afgeleide van $h(x) = 0{,}5^x$.

c Bepaal nu zelf de afgeleide van $f(x) = g^x$.

Opgave 2

Je hebt in de voorgaande opgave de afgeleide van $f(x) = g^x$ bepaald.

Ga na dat deze afgeleide ook geldt voor $f(x) = \text{e}^x$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **afgeleide van de exponentiële functie** geldt:

- Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$.

Hierbij maak je gebruik van het **veranderen van grondtal**: $g = \text{e}^{\ln(g)}$. (Denk er om dat $g > 0$ moet zijn.)
Dit is één van de definitieformules van logaritmen, toegepast op het getal e.

Hiermee kun je elke exponentiële functie N met groeifactor g per tijdseenheid t op meerdere manieren schrijven:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$
- $N(t) = N(0) \cdot \text{e}^{kt}$ waarin $k = \ln(g)$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ waarin $k = \log(g)$

Dat is handig als je met meerdere exponentiële functies met verschillende groeifactoren te maken hebt. Je kunt ze dan toch steeds hetzelfde grondtal geven, e of 10.

Verder kun je nu allerlei functies waarin vormen als e^x en/of g^x voorkomen differentiëren met de differentieerregels. Daarmee kun je van functies die ingewikkelder zijn dan zuiver exponentiële functies ook de karakteristieken bepalen.

Voorbeeld 1

In dit voorbeeld gaat het om het differentiëren van exponentiële functies met behulp van de differentieerregels die je tot nu toe hebt geleerd. Probeer eerst zelf de juiste afgeleiden te vinden en bekijk daarna pas de oplossingen.

- $f(x) = 5^x$
- $f(x) = 5^{2x}$
- $f(x) = x \cdot 5^{2x}$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0{,}5t}$
- $K(q) = 100 \cdot q^{-1} + 12 \cdot 0{,}8^q$
- $P(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \text{e}^{-\frac{1}{2}z^2}$

Antwoord

- $f(x) = 5^x$ geeft $f'(x) = 5^x \cdot \ln(5)$
- $f(x) = 5^{2x}$ geeft $f'(x) = 5^{2x} \cdot \ln(5) \cdot 2 = 2\ln(5) \cdot 5^{2x}$
- $f(x) = x \cdot 5^{2x}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot 5^{2x} + x \cdot 5^{2x} \cdot \ln(5) \cdot 2 = 5^{2x}(1 + 2\ln(5) \cdot x)$
- $N(t) = 6000 - 2000 \cdot 10^{-0{,}5t}$ geeft $N'(t) = -2000 \cdot 10^{-0{,}5t} \cdot \ln(10) \cdot -0{,}5 = 1000\ln(10) \cdot 10^{-0{,}5t}$
- $K(q) = 100 \cdot q^{-1} + 12 \cdot 0{,}8^q$ geeft $K'(q) = -100 \cdot q^{-2} + 12 \cdot 0{,}8^q \cdot \ln(0{,}8)$
- $P(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \text{e}^{-\frac{1}{2}z^2}$ geeft $P'(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \text{e}^{-\frac{1}{2}z^2} \cdot -z = \dfrac{-z}{\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-\frac{1}{2}z^2}$

Opgave 3

Probeer bij de functies in **Voorbeeld 1** eerst zelf de afgeleiden te vinden.

Opgave 4

Bepaal de afgeleide van:

a $f(x) = 5 \cdot 3^x$

b $f(x) = 5 \cdot 2^{0,5x}$

c $f(x) = 50 - 48 \cdot 10^{0,1x}$

d $f(x) = 100\,\mathrm{e}^{-0,1x} + 200$

Voorbeeld 2

Een radiatorplaat warmt op volgens de formule:

$T(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}9^t$

Hierin is:

- T de temperatuur in °C
- t de tijd in minuten

Laat zien hoe je deze formule kunt schrijven met grondtal e en bereken de snelheid waarmee het opwarmen begint op $t = 0$.

Antwoord

De formule moet de vorm $T(t) \approx 50 - 40 \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t}$ krijgen.

Omdat $0{,}9 = \mathrm{e}^k$ wordt $k = \ln(0{,}9) \approx -0{,}11$ en geldt $T(t) \approx 50 - 40 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}11t}$.

De opwarmsnelheid is: $T'(t) = -40 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}11t} \cdot -0{,}11 \approx 4{,}21 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}11t}$.

Op $t = 0$ bedraagt de opwarmsnelheid $T'(0) \approx 4{,}21$ °C/min.

Opgave 5

Bekijk het temperatuurverloop van de opwarmende radiator in **Voorbeeld 2**.

a Welke temperatuur heeft de radiator aan het begin van het opwarmingsproces?

b Je kunt de snelheid waarmee het opwarmen begint op $t = 0$ ook rechtstreeks vanuit $T(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}9^t$ afleiden. Laat zien, dat je dan dezelfde opwarmsnelheid krijgt.

Opgave 6

Bij benzinestations is vaak een extra service beschikbaar om de autobanden op te pompen. De automatische pomp levert een druk van 3,5 atmosfeer. De luchtdrukverandering in de band is recht evenredig met het drukverschil tussen de luchtdruk in de band en de luchtdruk van de pomp. Er geldt:

$p(t) = 3{,}5 - 2{,}1 \cdot 0{,}97^t$

Hierin is:

- p de luchtdruk in de band in atmosfeer
- t de tijd in seconden

a Maak een passende grafiek bij dit verband.

De luchtdruk in de band begint met 1,4 atmosfeer en is na 10 seconden pompen opgelopen tot 2,0 atmosfeer.

b Laat zien dat dit uit de gegeven formule volgt.

c Je stopt de pomp als de druk in de band 2,6 atmosfeer bedraagt. Na hoeveel seconden is dat het geval?

d Bereken de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

e Schrijf de gegeven formule in de vorm met grondtal e en bereken daarmee opnieuw de snelheid waarmee de druk in de band toeneemt op $t = 0$.

Verwerken

Opgave 7

Differentieer.

a $f(x) = 3 \cdot 1{,}2^x$

b $f(x) = 50 \cdot \mathrm{e}^{0{,}1x}$

c $f(x) = x \cdot 0{,}88^x$

d $f(x) = 60 - 20 \cdot 10^{-0{,}5x}$

Opgave 8

Bekijk de grafiek van de functie f met $f(x) = x + 2^{-x}$.

a Bereken het minimum van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

a Bereken algebraïsch de extremen f in twee decimalen nauwkeurig.

b Welke lijn raakt de grafiek van f in de oorsprong?

Opgave 10

Melk bewaar je in de koelkast op een temperatuur van 6 °C. Als je een glas melk inschenkt heeft dit op $t = 0$ dan ook deze temperatuur. Vanaf dat moment warmt de melk op tot kamertemperatuur, zeg 20 °C. Die opwarming gaat volgens de warmtewet van Newton zo, dat de snelheid van opwarmen recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving.

a Maak een schets van het verloop van de temperatuur T van de melk als functie van de tijd t in minuten.

b Leg uit dat de functie T die de temperatuur van de melk in het glas beschrijft moet voldoen aan $T'(t) = c \cdot (T(t) - 20)$.

c Toon aan dat een functie van de vorm $T(t) = 20 + a \cdot \mathrm{e}^{ct}$ voldoet.

d Neem aan, dat na 12 minuten de melk is opgewarmd tot 18 °C. Stel een daarbij passende formule voor $T(t)$ op.

e Bereken de opwarmsnelheid van de melk op $t = 0$ en op $t = 15$. Verklaar het verschil tussen beide waarden.

Toepassen

Radioactieve stoffen zijn stoffen die straling uitzenden. Bij dergelijke stoffen zijn de atoomkernen instabiel, bijvoorbeeld doordat er te veel protonen en/of neutronen in zitten. Een natuurlijke **radioactieve stof** is de radiumisotoop $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$. Bij deze stof zendt elke atoomkern een α-deeltje (een heliumkern) uit, waardoor hij overgaat in een atoom van het element radon: $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$. De halfwaardetijd van dit radium is ongeveer 1600 jaar. In die tijd wordt de helft van de radiumatomen omgezet in radon. Het percentage radium neemt voortdurend af (vanaf 100%).

Neem $t = 0$ op 1-1-1900 en t in jaren en noem het percentage radium N. Je kunt het verval van radium dan op drie manieren met een formule beschrijven:

- $N(t) = N(0) \cdot g^t$ met $N(0) = 100$ en $g^{1600} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 0{,}9996^t$
- $N(t) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $\mathrm{e}^{1600k} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}00043t}$
- $N(t) = N(0) \cdot 10^{kt}$ met $N(0) = 100$ en $10^{1600k} = 0{,}5$.
  Dit wordt: $N(t) \approx 100 \cdot 10^{-0{,}00019t}$

Opgave 11

Bekijk **Toepassen**.

a Reken de drie gevonden vervalformules zelf na.

b Bereken met elk van de drie gevonden vervalformules de vervalsnelheid op $t = 0$.

c Bereken ook de vervalsnelheid op $t = 90$. Wat gebeurt er met de vervalsnelheid als t toeneemt?

d In welk jaar is er nog 20% van de beginhoeveelheid radium over als er verder niemand aan komt?

Opgave 12: Radioactieve koolstof

Zowel in de atmosfeer als in levende organismen bevindt zich een bepaald percentage aan radioactieve koolstof C-14. Zodra een organisme sterft vindt er geen uitwisseling met de koolstof uit de atmosfeer meer plaats. Het percentage C-14 neemt vanaf dat moment exponentieel af met een halveringstijd van ongeveer 5600 jaar. Omdat alle levende organismen eenzelfde gehalte aan C-14 hebben, stelt dit ons in staat de ouderdom te bepalen van natuurlijke materialen als perkament, leren kleding, houten palen en dergelijke.
Het gehalte $C(t)$ aan C-14 is gegeven als percentage van het gehalte in levende organismen. t is de tijd in jaren met $t = 0$ op het moment dat het organisme is gestorven.

a Stel een formule op voor $C(t)$ van de vorm $C(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{kt}$. Bereken k in zes decimalen nauwkeurig.

b Van de Dode Zee-rollen is het gehalte aan C-14 nog 79%. Hoe oud zijn ze?

c Van een mummie is nog 65% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die mummie?

d Van een Indianensandaal uit een grot in Amerika is nog 33% van het gehalte aan C-14 over. Hoe oud is die sandaal?

Opgave 13: Radioactieve jodium

Bij onderzoek in het menselijk lichaam gebruiken artsen de stof jodium-131. Die stof is namelijk radioactief en daardoor kunnen deeltjes van die stof in het menselijk lichaam van buitenaf worden gevolgd. De halveringstijd (of halfwaardetijd) van jodium-131 is 8,06 dagen. Omdat radioactief verval exponentieel verloopt, kan de hoeveelheid jodium-131 in mg worden beschreven door:

$m = m_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$

t is daarin de tijd in dagen en m_0 is de hoeveelheid op tijdstip $t = 0$.

a Bereken k, dat is de zogenaamde desintegratieconstante.

b Als iemand een stof krijgt ingespoten die 5,00 mg jodium-131 bevat, hoeveel is daar na 15 dagen dan nog van terug te vinden?

c Toon aan dat in dit model de vervalsnelheid recht evenredig is met de hoeveelheid radioactieve stof. Hoe groot is de bijbehorende evenredigheidsconstante?

d Na hoeveel dagen is er nog 10% van de beginhoeveelheid over?

e Na hoeveel dagen is de vervalsnelheid (de radioactiviteit) verminderd tot 10% van de beginsnelheid?

f Als een meetnauwkeurigheid van twee decimalen maximaal haalbaar is, na hoeveel dagen is de ingespoten 5 mg jodium-131 dan niet meer meetbaar? Is de stof ooit volledig verdwenen?

Testen

Opgave 14

Differentieer de volgende functies en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt met de x-as. Geef de raaklijn met benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $f(x) = 3 \cdot 0{,}5^{2x-1} - 4$

b $f(x) = 5 - \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

Opgave 15

Bij het maken van foto's van je gebit gebruikt de tandarts röntgenstraling. De patiënt krijgt een heel geringe dosis straling toegediend en ondervindt daarvan geen nadelige gevolgen. Maar een tandarts die dit regelmatig doet krijgt te maken met een opeenhoping van straling in zijn lichaam. Daarom beschermt hij zich met behulp van een loden plaat.
De intensiteit van de straling neemt namelijk af in een stof als lood. Als die stralingsintensiteit wordt voorgesteld door I, dan geldt:

$I(d) = I(0) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot d}$

waarin d de dikte van de loden plaat in cm is en α een constante is die afhangt van het materiaal.

a Een loden plaat van 1 cm dik houdt ongeveer 60% van de straling tegen. Bereken de materiaalconstante α.

b Hoe dik moet een loden plaat zijn om 99% van de straling tegen te houden?

c Hoeveel bedraagt de snelheid waarmee de stralingsintensiteit afneemt op het moment dat die straling de loden plaat bereikt?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren van exponentiële functies**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.