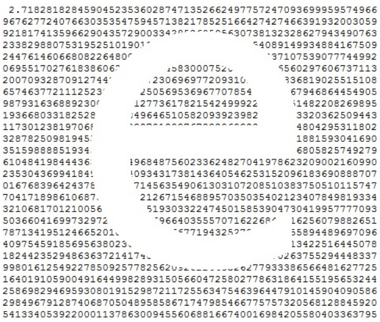
4.1 Het getal e

Inleiding

Je kunt functies van de vorm $f(x) = g^x$ nog niet differentiëren. Daar ga je nu wat aan doen. Je kunt dan tenminste iets zeggen over de veranderingssnelheid van groeiprocessen. Bij het differentiëren van exponentiële functies speelt het getal e een belangrijke rol. Daarmee ga je dan ook uitgebreid kennis maken.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van exponentiële functies bepalen;
- het getal e gebruiken, ook bij het bepalen van zo'n afgeleide.

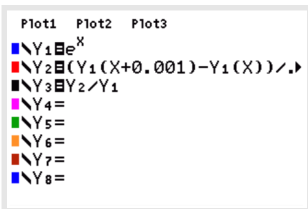
Voorkennis

- exponenten en logaritmen gebruiken;
- differentiëren met alle basisregels en dit toepassen bij het berekenen van hellingen, extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Met je grafische rekenmachine kun je een functie $f(x)$ en een benadering voor de afgeleide van deze functie vergelijken. Daarbij maak je gebruik van het feit dat $f'(x)$ kan worden benaderd door de veranderingssnelheid bij een hele kleine toename van x.



Figuur 2

Voer in je grafische rekenmachine in:
$y_1 = 2^x$
$y_2 = (y_1(x+0{,}001) - y_1(x))/0{,}001$
$y_3 = y_2/y_1$
Gebruik de standaardinstellingen van het venster.

a Leg uit dat y_2 een benadering is van de afgeleide van y_1.

b Wat valt op als je de grafiek van y_2 vergelijkt met die van y_1?

c Hoe kun je nu de grafiek van y_3 verklaren?

d Welke conclusie trek je? Geldt dit ook voor $f(x) = 3^x$? En voor andere exponentiële functies?

e Geldt dit ook voor $f(x) = x^2$? En voor $f(x) = x^3$?

Uitleg

Bekijk de applet: het getal e

Bij exponentiële groei gaat het om functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Neem je $b = f(0) = 1$, dan hebben deze functies de vorm $f(x) = g^x$. Ga na dat de helling van de grafiek, de groeisnelheid per eenheid, af hangt van de grootte van g. Neem je bijvoorbeeld $x = 1$, dan zie je de helling groter worden als g groter wordt.

Neem je bijvoorbeeld $g = 2$ dan zie je dat de helling voor elke x recht evenredig is met $f(x)$: $f'(x) = c \cdot g^x$.

- Voor $g = 2$ geldt: $c \approx 0{,}69$.
  Dus als $f(x) = 2^x$ dan is $f'(x) \approx 0{,}69 \cdot 2^x$.
- Voor $g = 3$ geldt: $c \approx 1{,}10$.
  Dus als $f(x) = 3^x$ dan is $f'(x) \approx 1{,}10 \cdot 3^x$.

Er lijkt een waarde van g te bestaan (tussen 2 en 3) waarvoor geldt dat $c = 1$. Ga na, dat dit bij $g \approx 2{,}7$ het geval is. Het getal waarbij dit PRECIES het geval is, is net zo'n bijzonder getal als π. Dit getal heeft de letter e gekregen: $\mathrm{e} \approx 2{,}71828...$
Voor dit getal geldt: als $f(x) = \mathrm{e}^x$, dan is $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

Met $f(x) = \mathrm{e}^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Er hoort dus ook een logaritme met grondtal e bij...

Opgave 1

Lees eerst de **Uitleg** goed door. In het algemeen geldt: Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c \cdot g^x$.

a Bekijk de grafiek van $f(x) = 3^x$ en (een benadering van) zijn afgeleide. Laat zien dat $f'(x) \approx 1{,}10 \cdot 3^x$, dus $c \approx 1{,}10$.

b Bekijk de grafiek van $f(x) = 2{,}5^x$ en (een benadering van) zijn afgeleide. Bepaal nu zelf de bijpassende waarde van c.

c Doe ditzelfde ook voor $f(x) = 2{,}7^x$ en $f(x) = 2{,}8^x$.

d Is er een getal g waarvoor $c = 1$? Hoe groot is dit getal ongeveer?

Opgave 2

Gegeven de functie $f(x) = g^x$. De verandering van f op een klein interval $[x, x+h]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g^{x+h} - g^x}{h}$.

a Leg dat met behulp van een figuur uit. (Maak eventueel een eigen applet in GeoGebra!)

b Laat zien, dat $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g^h - 1}{h} \cdot g^x$.

c Waarom kun je hieruit afleiden dat $f'(x) = c \cdot g^x$?

d Neem $g = \mathrm{e}$ en bepaal met behulp van het antwoord van b de waarde van e.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \mathrm{e}^x$.

a Hoe voer je die grafiek in je grafische rekenmachine in? Welke asymptoot heeft die grafiek?

b Waar in de grafiek vind je het getal e?

c Los met je grafische rekenmachine op $\mathrm{e}^x = 10$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De exacte oplossing van $\mathrm{e}^x = 10$ is gelijk aan $x = {}^{\mathrm{e}}\log(10)$.

d Laat zien dat je zo dezelfde waarde voor x vindt als bij c.

In plaats van $x = {}^{\mathrm{e}}\log(...)$ wordt in de wiskunde $\ln(...)$ gebruikt. Je rekenmachine heeft een speciale toets voor $\ln(...)$.

e Los nu zowel exact als in drie decimalen nauwkeurig op: $\mathrm{e}^x = 20$.

f Los op: $\frac{1}{50} \le \mathrm{e}^x \le 50$. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

g Welk hellingsgetal heeft de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$ in het punt $(1, \mathrm{e})$? Stel een vergelijking op van de raaklijn in dat punt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

De afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ vind je door de functie met een factor afhankelijk van g te vermenigvuldigen.
Als $f(x) = g^x$ dan is $f'(x) = c_g \cdot g^x$.

Er bestaat een waarde van g waarvoor geldt dat $c_g = 1$.

Deze **natuurlijke groeifactor** is het **getal e**.
Een benadering voor e is: e ≈ 2,71828...

Als $f(x) = \mathrm{e}^x$, dan is $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

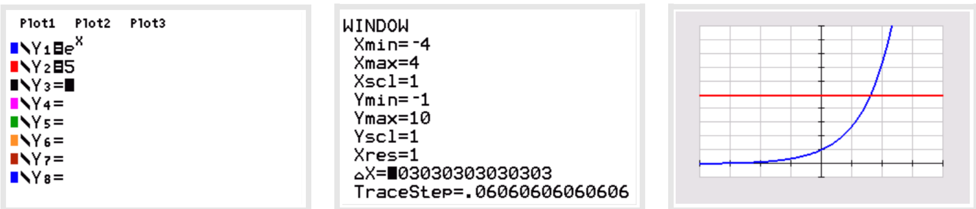
Met $f(x) = \mathrm{e}^x$ reken je net als met alle exponentiële functies. Op je rekenmachine zit er een speciale toets voor. En er hoort ook een logaritme met grondtal e bij...

Ook nu is $\mathrm{e}^x = a$ gelijkwaardig met $x = {}^{\mathrm{e}}\log(a)$.
In plaats van ${}^{\mathrm{e}}\log(a)$ schrijf je $\ln(a)$.
$\ln(a)$ is de **natuurlijke logaritme** van a.
De functies $y = \mathrm{e}^x$ en $y = \ln(x)$ zijn elkaars inverse functies. De grafieken daarvan zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Voorbeeld 1

Maak met je grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = \mathrm{e}^x$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.
Los op: $f(x) \leq 5$.

Antwoord



Figuur 3

$f'(x) = \mathrm{e}^x$, dus $f'(2) = \mathrm{e}^2$.
Verder is $f(2) = \mathrm{e}^2$.
De vergelijking van de raaklijn is daarom $y = \mathrm{e}^2 x - \mathrm{e}^2$.

Om de ongelijkheid op te lossen, moet je de waarden van x bepalen waarvoor $\mathrm{e}^x = 5$, dit geeft: $x = \ln(5)$.

De oplossing van de gegeven ongelijkheid is $x \leq \ln(5)$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Stel de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$ op.

b Bekijk de oplossing van de gegeven ongelijkheid. Ga met behulp van de grafiek van f na dat deze juist is.

c Los op: $f(x) \leq 20$.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $2^x = \frac{1}{8}$

b $e^x = \frac{1}{e^3}$

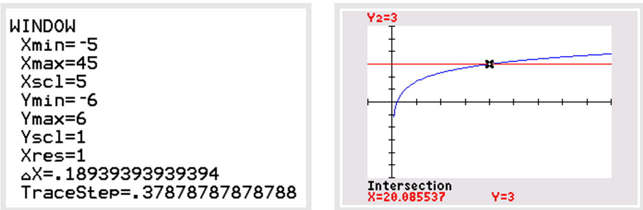
c $5\,e^x = 125$

d $8\,e^x = (2\sqrt{e})^3$

Voorbeeld 2

Bekijk met je grafische rekenmachine de grafiek van $f(x) = \ln(x)$.
Bepaal de karakteristieken van f en los op: $f(x) \leq 3$.

Antwoord



Figuur 4

Omdat $\ln(x) = {}^{e}\log(x)$ moet ook nu $x > 0$.

$D_f = \langle 0 \rightarrow \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$.

De verticale asymptoot is $x = 0$.

$f(x) = \ln(x) = 3$ geeft $x = e^3$ want de e-macht is de terugrekenfunctie van de natuurlijke logaritme.
Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af: $0 < x \leq e^3$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waar in de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ vind je het getal e?

b Leg uit hoe je het domein en het bereik van f kunt afleiden uit het domein en het bereik van $g(x) = e^x$.

c Voor welke waarde van x is $\ln(x) = 5$? Geef je antwoord exact en in één decimaal nauwkeurig.

d Los op: $-5 \leq \ln(x) \leq 5$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 2\,e^{2x} - 3\,e^{x}$.
Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.

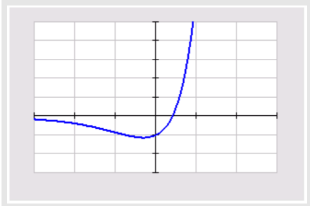
Antwoord

$f'(x) = 4\,e^{2x} - 3\,e^{x} = 0$ als $e^{x}(4\,e^{x} - 3) = 0$, dus $e^{x} = 0 \vee e^{x} = 0{,}75$.
Hieruit volgt: $x = \ln(0{,}75)$.

Aan de grafiek van f zie je dat er een minimum zit bij $x = \ln(0{,}75)$.

Nu is $f(0{,}75) = 2 \cdot \left(e^{\ln(0{,}75)}\right)^2 - 3\,e^{\ln(0{,}75)} = -1{,}125$.

En dus is: $B_f = [-1{,}125; \rightarrow\rangle$.



Figuur 5

Opgave 7

Bepaal de afgeleide van de volgende functies. Maak gebruik van alle bekende differentieerregels. Bepaal ook het bereik van f. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 3**.

a $f(x) = 100 - 2 \cdot e^{x}$

b $f(x) = e^{3x}$

c $f(x) = e^{3-x}$

d $f(x) = x\,e^{x}$

e $f(x) = \frac{x}{e^{x}}$

f $f(x) = e^{x^2}$

Opgave 8

Los algebraïsch op en geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $e^{2x} = 0{,}05$

b $\ln(x) = 2{,}06$

c $3\,e^{4x} = 10$

Opgave 9

Het is nuttig om de rekenregels voor exponentiële en logaritmische functies nog een keer te oefenen. Nu gebruik je daarbij (ook) het nieuwe grondtal e. Zoek ze eventueel eerst op (het wordt trouwens tijd voor een eigen formuleoverzicht).

Druk bij de volgende formules y uit in x en vereenvoudig de uitdrukking.

a $e^{y} = 2 \cdot e^{x}$

b $2 \cdot e^{2y} = x^3$

c $x = 2 \cdot \ln(y) + 3$

d $x = 2 \cdot \ln(y + 3)$

e $\ln(y) + 2 \cdot \ln(x) = 1$

f $(\ln(y) + 2) \cdot \ln(x) = 1$

g $(\sqrt{e})^{y} = 4x$

h $\left(\frac{1}{e}\right)^{y} = 4\,e^{x}$

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} - 2$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Bereken met behulp van logaritmen het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

c Bepaal de afgeleide van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

d Los op: $f(x) < -1$.

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = 4\ln(-0{,}5x) - 2$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Schrijf het domein en het bereik van f op.

c Bereken met behulp van exponenten het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

d Los op: $f(x) < -1$.

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op en benader zo nodig de antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

a $\mathrm{e}^{x} = 3$

b $\mathrm{e} \cdot x = 3$

c $\ln(x) = 3$

d $\log(x) = 3$

e $2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}1x-5} = 40$

f $2\ln(0{,}1x - 5) = 40$

Opgave 13

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op en benader zo nodig de antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

a $\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{x-6} = 1$

b $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x-6} = 0$

c $\ln(2x) - \ln(x-6) = 1$

d $\ln(2x) \cdot \ln(x-6) = 0$

e $3\,\mathrm{e}^{x} = 15\,\mathrm{e}^{2-x}$

Opgave 14

Druk N zo eenvoudig mogelijk uit in t:

a $\ln(N) = 2 \cdot \ln(t) - 3$

b $\log(N) = 2 \cdot \log(t) - 3$

c $\mathrm{e}^{2N} = t + 2$

d $10^{2N} = t + 2$

e $\ln(N) = 2t - 3$

f $\mathrm{e}^{t} = 2N - 3$

Toepassen

Figuur 6

Als een kop thee of een kop koffie een tijdje in de kamer op tafel blijft staan, koelt de inhoud langzaam af. Maar ze wordt nooit kouder dan de temperatuur in de kamer. Hoe verloopt die afkoeling precies?

Als een fles melk uit de koelkast wordt gehaald en een tijdje in een warmere kamer staat, warmt de melk langzaam op. Maar ze wordt nooit warmer dan de kamertemperatuur. Hoe verloopt die opwarming precies?

Volgens de warmtewet van Newton is de snelheid waarmee de temperatuur verandert recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.

Opgave 15

Een kop koffie uit een automaat heeft een temperatuur van 80 °C op het moment dat hij wordt ingeschonken. Hij koelt af volgens de formule:

$T(t) = 20 + 60 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}22t}$

Hierin is T de temperatuur van de koffie en t de tijd in minuten vanaf het moment van inschenken.

a Ga na dat de koffie volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 80 °C heeft.

b Hoeveel bedraagt de omgevingstemperatuur?

c Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.

d Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er inderdaad van afkoeling sprake is?

Opgave 16

Een glas melk heeft een temperatuur van 6 °C op het moment dat het uit de koelkast komt. De melk warmt op volgens de formule:

$T(t) = 20 - 14 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05t}$

Hierin is T de temperatuur van de melk en t de tijd in minuten vanaf het moment dat het glas uit de koelkast komt.

a Ga na dat de melk volgens de formule bij het inschenken een temperatuur van 6 °C heeft.

b Na hoeveel minuten is de melk opgewarmd tot 15 °C?

c Laat met behulp van een berekening zien dat de gegeven functie T aan de warmtewet van Newton voldoet.

d Hoe kun je aan de afgeleide van T zien dat er van opwarming sprake is?

Testen

Opgave 17

Gegeven is de functie $f(x) = 8 - 4\,\mathrm{e}^{x}$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Bereken met behulp van logaritmen het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

c Bepaal de afgeleide van f en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

d Los op: $f(x) \geq 2$.

Opgave 18

Gegeven is de functie $g(x) = 8 - 4\ln(x)$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van deze functie?

b Bereken algebraïsch het snijpunt van de grafiek van g met de x-as.

c Los op: $g(x) < 2$.

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $10\,e^{x-2} + 5 = 50$

b $\ln(x) + \ln(x+2) = 1$

Opgave 20

Differentieer:

a $f(x) = e^{x} - 3\,e^{2x}$

b $f(x) = x^{2}\,e^{x}$

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.