3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu **alle basisregels voor het differentiëren** geleerd. Het is nuttig om nog even alle begrippen op een rijtje te zetten voor jezelf.

Begrippenlijst

- differentieerregels — somregel, constante-regel, machtsregel
- samengestelde functie (kettingfunctie) — kettingregel — algemene machtsregel
- productfunctie — productregel
- quotiëntfunctie — quotiëntregel
- wiskundig model — optimaliseren

Activiteitenlijst

- afgeleiden bepalen m.b.v. differentieerregels — afgeleiden toepassen
- afgeleiden bepalen m.b.v. de kettingregel en de algemene machtsregel
- afgeleiden bepalen m.b.v. de productregel
- afgeleiden bepalen m.b.v. de quotiëntregel
- werken met wiskundige modellen met name bij optimaliseringsproblemen

Achtergronden

Figuur 1 Euler

De grootste wiskundige prestatie van de achttiende eeuw was de ontwikkeling van de ‘calculus’, van de ‘analyse’. Daarbij gaat het om differentiaal- en integraalrekening, de functietheorie en alles wat daaruit voortvloeide. De belangrijkste rol daarin werd vervuld door **Leonhard Euler (1707—1783)**. Euler leerde de wiskunde in Basel van **Johann Bernoulli (1667—1748)** en werd in 1773 opvolger van Daniël Bernoulli (1700—1782, zoon van Johann Bernoulli) als hoogleraar in St. Petersburg.

Vooral dankzij een fenomenaal geheugen (hij kende bijvoorbeeld de eerste zes machten van de eerste 100 priemgetallen uit zijn hoofd evenals alle formules uit de trigonometrie en de analyse en een grote hoeveelheid gedichten) kon hij zelfs toen hij volslagen blind was zijn onvoorstelbare productiviteit op het gebied van de wiskunde en de mathematische fysica handhaven. Met ‘Introductio in Analysin Infinitorum’ schreef hij in 1748 het eerste samenhangende werk over analyse. Toch was Euler bepaald geen monomane excentrieke wiskundige, maar vooral een gezinsmens (hij had 13 kinderen waarvoor hij allerlei spelletjes ontwierp).

Lees ook op deze site: **Differentiaalrekening**.

Testen

Opgave 1

Differentieer de functies.

a $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

b $f(x) = 4x\sqrt{x^2 + 1}$

c $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

d $f(x) = \frac{x^2+1}{4x}$

e $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{15x}{x^2+36}$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b De raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 3 snijdt de y-as in punt A. Stel een vergelijking van die raaklijn op en bereken de coördinaten van A.

c Voor welke a raakt de lijn $y = ax$ de grafiek van f?

Opgave 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^3}$.

a Bepaal het domein van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

c Welk probleem doet zich voor als je de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$ wilt opstellen?

Toch kun je twee raaklijnen van de vorm $y = ax$ aan de grafiek tekenen voor $x = 0$.

d Laat zien dat de lijnen $y = -2x$ en $y = 2x$ precies één punt met de grafiek van f gemeen hebben.

Opgave 4

De drainage (waterafvoer) van natte landerijen door het ingraven van rijen drainagebuizen is een kostbare zaak. De kosten per hectare hangen af van de onderlinge afstand x (meter) van de evenwijdige rijen buizen. Die onderlinge afstand heet de ‘drainageafstand’. Er geldt de formule:

$$K = a + 100 \cdot b \cdot \frac{100}{x} + c \cdot \frac{x^3}{125}$$

Hierin zijn a de vaste kosten per hectare, b de kosten van de aanleg van de buizen per meter en c de kosten van de schade aan het gewas bij een drainafstand van 25 meter. Alle kosten zijn in euro.

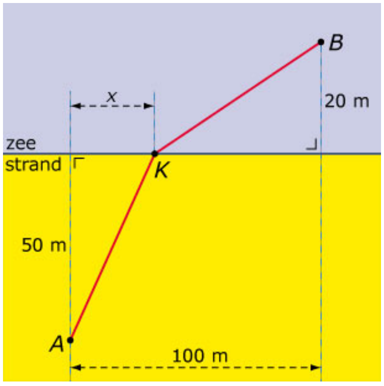
a Toon aan dat deze kosten een minimale waarde kunnen bereiken.

b Bereken voor $b = 3$ en $c = 1000$ de optimale drainafstand, dat wil zeggen de afstand tussen de rijen buizen waarvoor K minimaal is.

c Hoe groot is die minimale waarde van K als de vaste kosten € 300,00 per hectare bedragen?

Opgave 5

Een zwemmer is in nood voor de kust van Bergen. De figuur geeft een beeld van de situatie. De zwemmer bevindt zich bij punt B in zee. Een lid van de reddingsbrigade ziet de zwemmer en wil in actie komen. Zij bevindt zich in punt A. Ze wil natuurlijk via de snelste weg naar de drenkeling toe. Maar wat is de snelste weg?
Een deel van de weg moet ze rennend afleggen en een deel zwemmend. Ze rent met een gemiddelde snelheid van 6 meter per seconde en ze zwemt met een gemiddelde snelheid van 1,5 meter per seconde. Hoe kan ze het snelst hulp bieden? Noem het punt waar ze in het water stapt K.
Punt K kan overal langs de aangegeven 100 meterlijn liggen. De tijd die ze nodig heeft om in B te komen moet natuurlijk zo klein mogelijk zijn. Noem de totale tijd t, de gemiddelde snelheid over het strand v_s en de gemiddelde snelheid in zee v_z.



Figuur 2

a Druk t uit in AK, KB, v_s en v_z.

b Formuleer een verband tussen t en x.

c Bepaal met behulp van differentiëren de minimale tijd die het lid van de reddingsbrigade nodig heeft om de zwemmer te bereiken.

d Bepaal de kortste weg.

Toepassen

Opgave 6: File

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan.

Bekijk deze **file-simulatie** (een Java-applet).

Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren. Neem aan dat alle auto's 4 m lang zijn en hun onderlinge afstand precies de remweg R (in meter) is. Deze remweg hangt af van de snelheid v (in km/h).

Er geldt bij benadering: $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.

De verkeersdienst zet een teller halverwege de wegversmalling die meet hoeveel auto's er per minuut passeren. Stel nu een formule op voor het aantal auto's dat per minuut de teller passeert.

Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid zoveel mogelijk auto's de teller passeren.

Opgave 7: Energieverbruik van vissen

Het energieverbruik van een vis tijdens een zwemtochtje in stilstaand water is recht evenredig met de tijd t en met de derde macht van zijn snelheid door het water:

$E = c \cdot v^3 \cdot t$

Hierin is:

- E het energieverbruik in J (Joule),
- v de snelheid van de vis ten opzichte van het water in km/h,
- t de tijd in uren,
- c de evenredigheidsconstante is.

a Neem aan dat $c = 0{,}15$. Bereken het energieverbruik van een vis die in stilstaand water een afstand van 5 km aflegt met een snelheid van 2 km/h.

b Toon aan dat het energieverbruik per afgelegde kilometer ten opzichte van de oever van een stroomopwaarts zwemmende vis gelijk is aan:

$U = c \cdot \frac{v^3}{v - s}$

als s de stroomsnelheid van het water in km/h is.

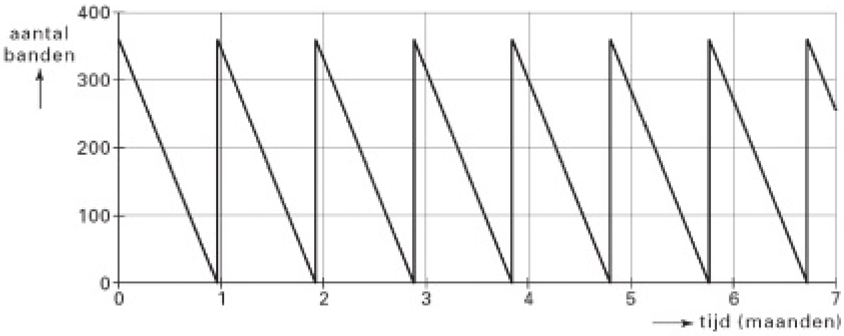
c Neem weer aan dat $c = 0{,}15$. Bereken het energieverbruik van een vis die in een rivier stroomopwaarts een afstand van 5 km (ten opzichte van de oever) aflegt met een snelheid van 3,5 km/h ten opzichte van het water dat met een snelheid van 2 km/h stroomt.

d Verklaar waarom zalmen de rivier op trekken met een gemiddelde snelheid ten opzichte van het water van 1,5 maal de stroomsnelheid, door aan te tonen dat hun energieverbruik dan minimaal is.

Examen

Opgave 8: Autobanden

De firma Nedtyre verkoopt een speciaal type autobanden aan garages, bandenspecialisten en autospeciaalzaken. Jaarlijks verkoopt Nedtyre 4500 banden van dit type. Nedtyre koopt deze banden in bij de Italiaanse bandenfabriek Carrelli. Om de voorraad op peil te houden doet Nedtyre steeds bestellingen van 360 banden. We nemen aan dat de verkoop gelijkmatig over het jaar verdeeld is. Men zorgt ervoor dat de nieuwe bestelling telkens precies arriveert op het moment dat er geen banden meer in voorraad zijn. Dan zit er telkens 0,08 jaar, dus iets minder dan een maand, tussen twee opeenvolgende bestellingen. De voorraad autobanden verloopt volgens de grafiek in deze figuur.



Figuur 3

De voorraadkosten zijn evenredig met het aantal banden dat in voorraad is. De kosten om een band een jaar lang in voorraad te houden bedragen € 180.

a Toon aan dat de totale voorraadkosten volgens dit model € 32400 per jaar bedragen.

De banden worden door Nedtyre voor € 70 per stuk verkocht. De inkoopprijs die Nedtyre betaalt, is € 30 per band. Bij het berekenen van de winst moet ook rekening worden gehouden met bovengenoemde voorraadkosten en met de leveringskosten. Deze leveringskosten bedragen € 3500 per bestelling.

b Laat met een berekening zien dat uit het voorgaande volgt dat Nedtyre gemiddeld per band een winst van ongeveer € 23,08 maakt. Je mag hierbij geen gebruik maken van de formule die later in deze opgave vermeld wordt.

De leveringskosten van € 3500 gelden voor elke bestelling, ongeacht het aantal bestelde banden. Ook het jaarlijks verkochte aantal van 4500 banden blijft voortdurend gelijk. Nedtyre wil nu onderzoeken of de gemiddelde winst per band verhoogd kan worden door in plaats van 360 banden een ander aantal banden per keer te bestellen. Hierdoor zouden de totale kosten af kunnen nemen. Men maakt de volgende formule:

$$W = 40 - \frac{3500}{x} + 0{,}02x$$

Hierin is W de gemiddelde winst per band in euro's en x de bestelgrootte (het aantal banden dat telkens wordt besteld).

c Toon aan dat deze formule voor iedere bestelgrootte x juist is.

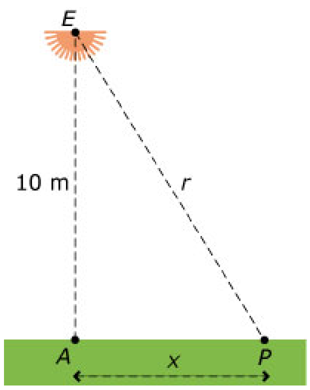
d Nedtyre wil zo veel mogelijk winst per band maken. Stel de afgeleide van W op en bereken met behulp daarvan bij welke bestelgrootte x de gemiddelde winst per band maximaal is.

(bron: examen wiskunde A1,2 vwo 2004, eerste tijdvak)

Opgave 9: Wegverlichting

Een belangrijke eis die aan wegverlichting gesteld wordt, is dat er overal langs de te verlichten weg ongeveer even licht is, en niet bijvoorbeeld halverwege tussen twee lampen veel donkerder dan vlak onder een lamp. Om aan te geven hoe licht het op een bepaalde plaats is, gebruikt men het begrip 'verlichtingssterkte' (gemeten in lux). Voor het berekenen van de lichtsterkte bij één lamp gebruikt men het volgende model. Uitgangspunt is een lamp die op 10 m hoogte boven het wegdek hangt en waarvan het licht zich in alle richtingen naar beneden kan verspreiden. Zie de figuur. De afstand van de lamp tot een punt P op het wegdek noemen we r (in meters). De verlichtingssterkte in punt P noemen we S (in lux). Voor S geldt:

$$S = \frac{100000}{r^3}$$



Figuur 4

Punt A bevindt zich recht onder de lamp, x is de afstand in meters tussen punt A en punt P.

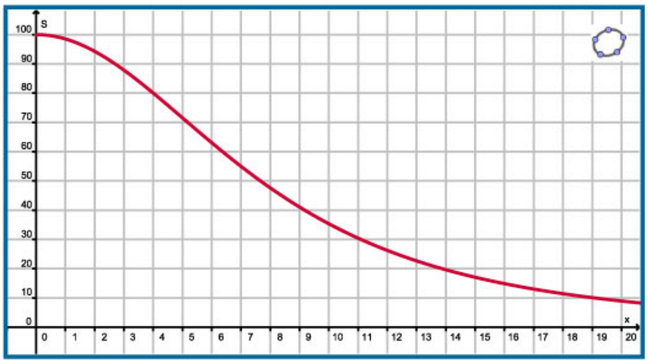
a Bereken x als de verlichtingssterkte in P de helft is van die in A. Rond het antwoord af op gehele decimeters.

Men kan S ook als functie van x opvatten. De afgeleide functie $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$ is een maat voor de verandering van de verlichtingssterkte (in lux/meter) als men zich over het wegdek van punt A verwijdert. Er geldt:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{-300000x}{(100+x^2)^2\sqrt{100+x^2}}.$$

b Toon dit aan.

In de figuur zie je de grafiek van S als functie van x getekend. Iemand vraagt zich af of er een punt is waar $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$ kleiner is dan -8 lux/m. Hij probeert vergeefs deze vraag te beantwoorden door een vergelijking op te lossen. Met behulp van deze figuur en de formule voor $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$ is echter snel na te gaan dat er inderdaad zo'n punt bestaat.



Figuur 5

c Laat dit zien.

(bron: examen wiskunde A vwo 1998, eerste tijdvak)

Opgave 10: Sportprestaties

In de atletiek kent men verschillende onderdelen. De ene atleet is goed in hardlopen, de andere atleet in hoogspringen of speerwerpen. Iemand die de 100 meter binnen de 11 seconden loopt is een goede sprinter, terwijl iemand die met een polsstok hoger springt dan 5 meter een goede polsstokhoogspringer is. Men kan zich afvragen wie van de twee de betere atleet is. Om prestaties bij verschillende atletiekonderdelen te kunnen vergelijken, hanteert de Koninklijke Nederlandse Atletiek Unie (KNAU) een puntensysteem. Met dit systeem worden sportprestaties omgerekend tot een aantal punten met behulp van verschillende formules. Vanzelfsprekend hoort bij een betere prestatie een groter aantal punten. Zie tabel.

KNAU-puntensysteem voor mannen				
soort sport	formule	onderdeel	a	b
loop- nummers	$P = \frac{a}{t} - b$	100 m	29950	1881,5
		200 m	52611,4	1547,1
		400 m	111960	1433,5
		800 m	248544	1323,2
		1500 m	489971,4	1224,7
		3000 m	1077300	1234,9
spring- nummers	$P = a\sqrt{r} - b$	hoogspringen	2440	2593,5
		verspringen	1094,4	2075,3
		hinkstapsprong	762,9	2074,5
		polsstokhoogspringen	1040	1272,5
werp- nummers	$P = a\sqrt{r} - b$	kogelstoten	462,5	1001,8
		discuswerpen	249,8	893,5
		speerwerpen	190,2	711,3

Tabel 1

Voor vrouwen hanteert de KNAU een vergelijkbare tabel.
In deze tabel lezen we af dat voor hardlopen het behaalde aantal punten P wordt berekend met de formule $P = \frac{a}{t} - b$.

Hierbij is t de tijd in seconden die de atleet nodig heeft om de afstand te lopen. De getallen a en b worden afgelezen in de betreffende kolommen.

a Als een man de 100 meter in 10,70 seconden loopt, dan heeft hij daarmee 880,2 punten behaald. Bereken hoeveel seconden, in 2 decimalen nauwkeurig, een man over de 400 meter moet doen om ook 880,2 punten te behalen.

Voor de spring- en werpnummers wordt door de KNAU de formule $P = a\sqrt{r} - b$ gebruikt.
Hierin is r de gesprongen hoogte of afstand in meters of de geworpen afstand in meters. Zie tabel.
De International Association of Athletics Federations (IAAF) kent ook een puntensysteem. Voor het berekenen van de punten gebruikt de IAAF andere formules dan de KNAU. Bij het speerwerpen voor mannen ziet de IAAF-formule er als volgt uit: $P = 10{,}14 \cdot (r - 7)^{1{,}08}$. Wanneer we de formule van speerwerpen voor mannen van de KNAU met die van de IAAF vergelijken, dan blijkt dat voor sommige geworpen afstanden r de formule van de KNAU meer punten oplevert dan de formule van de IAAF.

b Onderzoek voor welke waarden van r dat het geval is.

De formules van de KNAU en van de IAAF die horen bij het speerwerpen voor mannen verschillen van elkaar. Dat maakt voor het aantal te behalen punten niet zoveel uit. Er is echter wel een opmerkelijk verschil tussen de grafieken van beide formules: de grafiek van de IAAF stijgt steeds sneller terwijl de grafiek van de KNAU steeds langzamer stijgt. Dat laatste geldt voor elke formule van de KNAU voor de spring- en de werpnummers. Voor elke positieve waarde van a hoort bij de formule $P = a\sqrt{r} - b$ een stijgende grafiek. De stijging van deze grafiek verloopt bovendien steeds minder snel naarmate r toeneemt.

c Toon deze laatste bewering aan door gebruik te maken van differentiëren.

(bron: examen wiskunde A vwo 2003, eerste tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.