

3.5 Optimaliseren

Inleiding

Een **model** is een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid.

In de wetenschap wordt veel met modellen gewerkt omdat de werkelijkheid te complex is om zonder meer te beschrijven. Door niet belangrijke details weg te laten (verstandige aannames te doen) kan een model worden opgesteld dat met wiskundige middelen is te beschrijven en door te rekenen. Uit het doorrekenen van het model worden conclusies getrokken die dan weer kunnen worden vergeleken met de realiteit.

Je leert in dit onderwerp

- werken met rekenmodellen waarin het differentiëren kan worden toegepast, zoals optimaliseringsproblemen.

Voorkennis

- differentiëren met alle differentieerregels;
- werken met de afgeleide onder andere voor het berekenen van extremen.

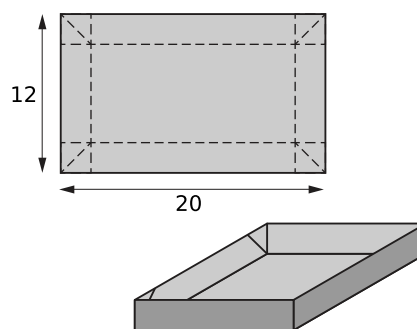
Verkennen

Opgave V1

Een industrieel ontwerper ontwikkelt een type opbergbakje dat zuiver rechthoekige zijvlakken heeft. Het is van boven open en wordt gemaakt uit dunne rechthoekige plaatjes staal van 12 cm bij 20 cm die door een machine in de gewenste vorm worden gevouwen. De vierkantjes op de hoeken van een plaatje staal worden daarbij dubbel gevouwen en naar binnen geklapt. De bakjes krijgen een vlakke kunststof deksel die precies de bovenzijde afsluit.

De afmeting van de vierkantjes (de lengte van een zijde ervan) stelt hij zo vast dat de inhoud van het bakjes zelf zo groot mogelijk wordt.

Welke afmeting stelt hij in?



Figuur 1

Uitleg

Een industrieel ontwerper ontwikkelt een type opbergbakje dat zuiver rechthoekige zijvlakken heeft. Het is van boven open en wordt gemaakt uit dunne rechthoekige plaatjes staal van 12 centimeter bij 20 centimeter. Deze worden door een machine in de gewenste vorm gevouwen. De vierkantjes op de hoeken van een plaatje staal worden daarbij dubbelgevouwen en naar binnen geklapt. De bakjes krijgen een vlakke kunststof deksel die precies de bovenzijde afsluit.

De afmeting van de vierkantjes (de lengte van een zijde ervan) stelt hij zo vast dat de inhoud van de bakjes zelf zo groot mogelijk wordt.

Welke afmeting kiest hij voor de zijden van de vierkantjes?

Om dit probleem op te lossen maak je een geschikt wiskundig rekenmodel.

- Doe aannames.
De zijvlakken en bodem zijn rechthoekig (want er wordt uit een rechthoek gevouwen en op de hoeken zitten vierkantjes). Alle zijkanten zijn even hoog (want op de hoeken zitten vierkantjes).
- Bepaal van welke variabele(n) een rol spelen.
De afmeting van de vierkantjes, dit is ook de hoogte van het bakje, noem deze x .
De inhoud, want die moet maximaal zijn. Noem deze I .

- Stel formules op.
Voor de inhoud I van het bakje geldt: $I = \text{lengte} \cdot \text{breedte} \cdot \text{hoogte}$.
Vul hiervoor uitdrukkingen in x in.
- Zorg dat er één formule met twee variabelen overblijft.
Je vindt $I = (12 - 2x)(20 - 2x)x$.

De aannames plus de formule vormen je wiskundige model.

De maximale inhoud vind je met de grafische rekenmachine of met behulp van differentiëren.

Ga na dat voor $x \approx 2,43$ centimeter de inhoud maximaal is. De maximale inhoud is ongeveer gelijk aan 263 kubieke centimeter.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

- Laat zien hoe je aan de formule voor de inhoud $I(x)$ van het bakje komt.
- Welke waarden kan x aannemen?
- Bepaal de afgeleide van $I(x)$ en bereken met behulp daarvan de waarde van x waarvoor I maximaal is.

Theorie en voorbeelden

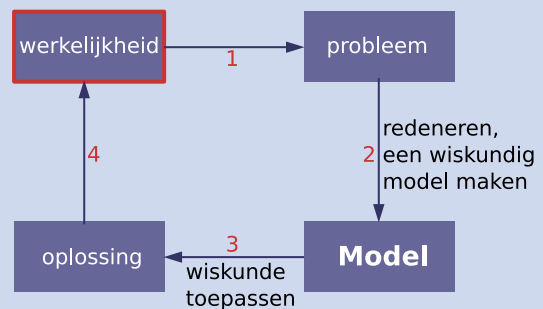
Om te onthouden

Wiskunde wordt veel toegepast in wetenschap en handel en industrie om problemen op te lossen.

Er wordt dan een **wiskundig model** gemaakt. Een wiskundig model is een vereenvoudiging van de werkelijkheid op grond van verstandige aannames. In een goed model zijn alle belangrijke factoren nog aanwezig, alleen de onbelangrijke blijven buiten beschouwing. Meestal heeft het model de vorm van één of meer formules die beschrijven hoe de belangrijke variabelen zich gedragen.

Op die formules wordt dan een geschikte wiskundige theorie losgelaten.

Bij **optimaliseren** gaat het om wiskundige modellen waarbij wordt gezocht naar een maximale of een minimale waarde. Vaak is dat het maximum of minimum van een functie. Je kunt dat vinden door eerst te differentiëren, dan de afgeleide gelijk te stellen aan nul, en vervolgens de ontstane vergelijking op te lossen. Of je bepaalt het maximum of minimum met de grafische rekenmachine.



Figuur 2

Voorbeeld 1

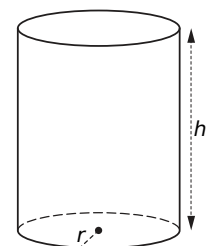
Een blikfabriek maakt cilindervormige blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.

Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Antwoord

Stel een rekenmodel op.

- Doe aannames.
Het blik is zuiver cilindrisch en de benodigde hoeveelheid blik is gelijk aan de totale oppervlakte van het blik.
- Bepaal welke variabelen een rol spelen.
De straal van (het grondvlak van) het blik r in cm.
De hoogte h in cm.
De inhoud I van het blik is $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$.
De oppervlakte A van het blik die minimaal moet zijn.



Figuur 3

- Stel formules op.
Voor de inhoud van het blik geldt: $I = \pi r^2 h = 1000$.
Voor de oppervlakte van het blik geldt: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
- Zorg dat er één formule met twee variabelen overblijft.
Als je beide formules combineert krijg je: $A(r) = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$.

Met behulp van differentiëren (of de grafische rekenmachine) vind je dat voor $r \approx 5,4$ cm en $h \approx 10,8$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

Opgave 2

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Laat zien, hoe je aan de formule voor $A(r)$ komt.
- Bereken met behulp van de grafische rekenmachine voor welke waarde van r de oppervlakte A van het conservenblik minimaal is.
- Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van r de oppervlakte A van het conservenblik minimaal is. Rond het eindantwoord af op twee decimalen.

Voorbeeld 2

ChemoTech brengt een nieuw onkruidbestrijdingsmiddel CHIF op de markt. De productiekosten zijn bekend, er is **een kostenmodel** voorhanden:

$$TK = 0,25q^3 - 3q^2 + 18q + 30$$

Hierin stelt q het aantal geproduceerde kilogram (in duizendtallen) CHIF voor en TK de totale kosten in duizenden euro.

Voor de opbrengst gelden de volgende aannames.

- Bij een prijs van € 18,00 per kilogram zal de verkoop 4500 kilogram zijn.
- Bij een prijs van € 9,00 per kilogram zal de verkoop 31500 kilogram zijn.

De verkochte hoeveelheid q hangt lineair af van de prijs p .

Welke winst kan ChemoTech met dit product maximaal maken?

Antwoord

Stel een rekenmodel op.

- Doe aannames.
ChemoTech produceert alleen bestrijdingsmiddel als het ook wordt verkocht.
- Bepaal welke variabele(n) van belang zijn.
De winst. Noem die TW .
De prijs p in euro/kg, de verkochte hoeveelheid q per 1000 kg, de totale opbrengst TO per 1000 euro, de totale kosten TK per 1000 euro.
- Stel formules op.
Er geldt: $TW = TO - TK$, $TO = p \cdot q$ en $TK = 0,25q^3 - 3q^2 + 18q + 30$.
De verkoop q hangt lineair af van de prijs p : $q = a \cdot p + b$.
De grafiek hiervan gaat door (9; 31,5) en (18; 4,5).
Daaruit volgt: $q = -3p + 58,5$.
- Zorg dat er één formule met twee variabelen overblijft.
 $TW = TO - TK$ geeft: $TW = p \cdot q - (0,25q^3 - 3q^2 + 18q + 30)$.
Nu zijn er nog drie variabelen. p komt het minst vaak voor, werk die weg.
Als $q = -3p + 58,5$, dan geldt $p = 19,5 - 0,33q$.
Vul dit in in de formule voor TW en dit geeft: $TW = -0,25q^3 + 2,67q^2 + 1,5q - 30$.

De maximale winst is € 25821,59. Dit is te vinden met behulp van differentiëren, met de grafische rekenmachine of met **dit kostenmodel in Excel**.



Figuur 4

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

- a Begin met de formule $TW = TO - TK$ en leid de formule voor de totale winst $TW = -0,25q^3 + 2,67q^2 + 1,5q - 30$ af.
- b Bereken met behulp van differentiëren voor welke q de waarde van TW maximaal is.

Voorbeeld 3

Een winkelier die een product wil verkopen moet daarvan voldoende in voorraad hebben. Hij bestelt dit product bij de fabrikant. Daarvoor betaalt hij bestelkosten. Hoe vaker hij bestelt, hoe hoger de bestelkosten. Aan de andere kant, als hij niet vaak bestelt, dan moet hij zelf een grotere voorraad aanhouden en daarvoor maakt hij voorraadkosten.

Stel je voor dat de jaarlijkse vraag V exemplaren bedraagt, de bestelkosten B euro per bestelling zijn, elk exemplaar E euro kost en dat de voorraadkosten P procent van de kostprijs van de gemiddelde voorraad bedragen. De winkelier doet een aantal bestellingen per jaar van steeds evenveel exemplaren. Welke bestelgrootte is het gunstigst voor hem?

Antwoord

Stel een rekenmodel op.

- Doe aannames.
De leverancier bestelt als zijn voorraad op is en de levertijd is erg kort. Gunstig betekent: de bestelkosten plus de voorraadkosten zijn bij elkaar zo laag mogelijk.
- Bepaal welke variabele(n) een rol spelen.
De bestelgrootte moet je berekenen, noem deze x .
De jaarlijkse vraag V .
De bestelkosten per bestelling B .
De kosten per product E .
De voorraadkosten: $\frac{P}{100} \cdot$ kosten van de producten die gemiddeld op voorraad zijn.
De bestelkosten + de voorraadkosten, noem deze TK .
- Stel formules op.
Het aantal bestellingen is: $\frac{V}{x}$
De bestelkosten zijn: $B \cdot \frac{V}{x}$
Het gemiddeld aantal producten op voorraad: direct na bestellen zijn er x , net voor de volgende keer bestellen zijn er 0, dus gemiddeld $\frac{1}{2} \cdot x$
De voorraadkosten zijn: $\frac{1}{2} \cdot x \cdot E \cdot \frac{P}{100}$.
- Zorg dat er één formule met twee variabelen overblijft.
De formule voor de totale kosten is: $TK = B \cdot \frac{V}{x} + \frac{1}{2}x \cdot E \cdot \frac{P}{100} + E \cdot V$
Deze formule heeft alleen x als variabele.
Van $TK(x)$ moet het minimum worden berekend. Omdat er onbekende constanten zijn, kan dat alleen met differentiëren.
Nu is: $\frac{dTK}{dx} = -B \cdot \frac{V}{x^2} + \frac{E \cdot P}{200}$
 $\frac{dTK}{dx} = 0$ geeft $x = \sqrt{\frac{200 \cdot B \cdot V}{E \cdot P}}$.
Bij deze waarde van de bestelgrootte zijn zijn kosten minimaal.

Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**.

- Leg uit waarom je geen rekening hoeft te houden met de kosten voor het aanschaffen van de producten.
- Leid zelf de formule voor de totale kosten TK af.
- Laat met behulp van differentiëren zien dat een bestelgrootte van $x = \sqrt{\frac{200 \cdot B \cdot V}{E \cdot P}}$ de minste kosten voor de winkelier oplevert.

Opgave 5

Een bedrijf brengt droogtrommels op de markt. Er is een vraag naar droogtrommels van 1500 stuks per jaar. Voor de opslagkosten moet je rekenen met een rentepercentage van 9%. De productieprijs is € 700 en de prijs voor het plaatsen van een bestelling is € 15.

- Stel een formule op voor het verband tussen de totale bestelkosten en de bestelgrootte.
- Stel een formule op voor het verband tussen de opslagkosten en de bestelgrootte.
- Stel een formule op voor het verband tussen de totale kosten en de bestelgrootte.
- Bereken de optimale bestelgrootte.

Verwerken

Opgave 6

Op rechthoekige vellen papier van 1 vierkante meter worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 decimeter breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 decimeter breedte.

Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

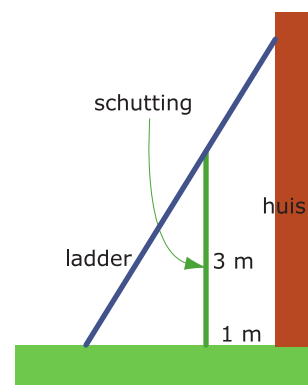
- Maak een schets van de situatie met de gegevens er in.
- Neem aan dat de breedte van zo'n poster wordt voorgesteld door x decimeter. Leid een formule af voor de oppervlakte A van het bedrukte deel als functie van x .
- Bereken met behulp van differentiëren de waarde van x waarvoor $A(x)$ maximaal is.
- Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

Opgave 7

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 meter van de muur staat een schutting van 3 meter hoog.

Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen?

Ga ervan uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staat.



Figuur 5

Opgave 8

Een kledingbedrijf introduceert een nieuw soort regenpak. Na verloop van tijd blijkt er een vraag te zijn van 1200 regenpakken per jaar. Ga voor de opslagkosten uit van 7% per jaar. De productieprijs van een regenpak is € 35,00. De prijs voor het plaatsen van een bestelling is € 10,00.

Bereken de optimale bestelgrootte.

Opgave 9

Een aantal jaar geleden werden voor het verbruik van aardgas twee tarieven gehanteerd:

- Een tarief voor kleinverbruikers: iemand die jaarlijks tot 600 kubieke meter aardgas verbruikte, betaalde 26 cent per kubieke meter en een vastrecht van € 40,00 per jaar.
- Een tarief voor grootverbruikers: iemand die jaarlijks 600 kubieke meter of meer verbruikte, betaalde 16 cent per kubieke meter met een vastrecht van € 80,00 per jaar.

- a Teken de grafiek van de prijs p van het gasverbruik per jaar als functie van het aantal verbruikte kubieke meter aardgas a .
- b Geef zowel voor kleinverbruik als voor grootverbruik een passende formule.
- c Voor welke waarde van a is er een 'sprong' in de grafiek?
Tuinders waarvan het gasverbruik in de buurt van de 600 kubieke meter uitkwam lieten gas afbranden. Dat betekent dat ze opzettelijk gas lieten ontsnappen en dat lieten verbanden.
- d Waarom en bij welke waarden voor a zouden ze dat hebben gedaan?
- e Hoe moet het vastrecht voor grootverbruik worden aangepast om het afbranden van gas te voorkomen?
- f Waarom blijft er dan nog altijd sprake van een 'knik' in de grafiek?

Opgave 10

De eigenaar van een camping wil het aantal plaatsen uitbreiden. Hij koopt een hectare grond en wil daarop zuiver vierkante kampeerplaatsen inrichten. Hij heeft echter een deel van de grond nodig voor wegen, toilet- en wasgelegenheid, en dergelijke. Per kampeerplaats schat hij daarvoor zo'n 20 vierkante meter te moeten reserveren. Verder gaat hij ervan uit dat het bedrag dat hij per plaats kan rekenen afhangt van de grootte ervan. In ieder geval rekent hij per nacht een prijs van € 4,50, maar daar bovenop denkt hij nog zo'n € 2,50 per meter breedte te kunnen vragen.

Voor plaatsen van 4 meter breedte zal hij dan € 14,50 per nacht kunnen rekenen. De vraag van deze campingeigenaar is daarom: 'Hoe breed moet ik mijn kampeerplaatsen maken om zo veel mogelijk te verdienen aan deze extra hectare grond?'

Los dat probleem voor hem op. Schrijf een volledige uitwerking op waarbij je gebruikmaakt van differentiëren.

Testen**Opgave 11**

In een bepaalde supermarkt worden pakken yoghurt verkocht voor € 0,90 per stuk. Er worden elke week ongeveer 1000 pakken yoghurt verkocht. De bedrijfsleider denkt dat hij meer pakken yoghurt kan verkopen als hij de prijs verlaagt. Elke 4 cent prijsverlaging kon wel eens een omzetverhoging van 100 pakken betekenen. De pakken yoghurt worden ingekocht voor € 0,60 per stuk.

- a Stel een formule op voor de winst als de functie van de verkoopprijs. Ga er daarbij van uit dat de bedrijfsleider gelijk heeft.
- b Bij welke prijs is zijn winst maximaal? Hoe groot is de wekelijkse omzet dan?
- c Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Opgave 12

Een fabrikant heeft opslagruimte nodig. Het meest praktisch voor zijn producten is een rechthoekige loods met een vloeroppervlakte van $0,5 \text{ hm}^2$. Hij vraagt bij de gemeente de aankoop van een rechthoekig stuk grond op het industrieterrein aan om die loods op te kunnen bouwen. De gemeente antwoordt dat hem alleen een bouwvergunning kan worden verstrekt als hij een groenvoorziening om zijn loods aanbrengt. De voorschriften zijn: groenstroken aan de zijkanten en de achterkant van de loods van 5 m breed en een groenstrook aan de voorkant van 8 m breed. De fabrikant slaat nu aan het rekenen. Hij wil dit probleem oplossen: 'Hoe kan ik een zo klein mogelijk rechthoekig stuk grond kopen waar een loods van $0,5 \text{ hm}^2$ op past en dat voldoet aan de voorschriften van de gemeente?'

Los het probleem van de fabrikant op met behulp van differentiëren.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
