3.4 De quotiëntregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ deelt, krijg je een nieuwe functie die de quotiëntfunctie van f en g heet. Soms kun je die quotiënten uitwerken, maar meestal niet.

Daarom moet je een differentieerregel hebben voor quotiëntfuncties $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Je leert in dit onderwerp

- de regel voor het differentiëren van quotiëntfuncties gebruiken.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel, de kettingregel en de productregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Een gebroken functie (quotiëntfunctie) is bijvoorbeeld $f(x) = \frac{2x^5}{x^2}$.

a Laat met een voorbeeld zien dat NIET geldt: $f'(x) = \frac{t'(x)}{n'(x)}$.

b Hoe bepaal je de afgeleide van $f(x) = \frac{1}{x}$?

c Hoe kun je het resultaat van b gebruiken met het berekenen van de afgeleide van f?

Uitleg

Je wilt een quotiënt (een deling) van twee functies differentiëren. Je probeert

$q(x) = \frac{2x^5}{x^2}$ hieruit volgt $q'(x) = \frac{10x^4}{2x} = 5x^3$.

Maar omdat $q(x) = \frac{2x^5}{x^2} = 2x^3$ is $q'(x) = 6x^2$.

Dus je eerste probeersel was fout, je moet de functies eerst herleiden Je mag een gebroken functie dus niet differentiëren door eerst afzonderlijk de teller en noemer te differentiëren en dan te delen. Maar eerst herleiden en dan differentiëren, kan niet altijd.

Hoe moet je dan differentiëren bij een functie als $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$?
De oplossing vind je door de productregel te gebruiken.

Je noteert de functie als een productfunctie: $f(x) = x^2 \cdot (x-3)^{-1}$.

Dan differentieer je met de productregel: $f'(x) = 2x \cdot (x-3)^{-1} + x^2 \cdot -1(x-3)^{-2}$.

Werk vervolgens de negatieve exponenten weg en tel de breuken die ontstaan op:

$$f'(x) = \frac{2x}{x-3} - \frac{x^2}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-3)}{(x-3)^2} - \frac{x^2}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x}{(x-3)^2} - \frac{x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$$

Met behulp van de productregel kun je quotiëntfuncties differentiëren. Je krijgt hier een vorm met twee breuken. Die kun je gelijknamig maken en optellen.

Doe je dit in het algemeen dan krijg je:

$f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$.

Dit kun je als quotiëntregel voor differentiëren gebruiken.

Opgave 1

Bekijk de functie $q(x) = \frac{2x^5}{x^2}$ in de **Uitleg**. Je ziet, dat je om de afgeleide te vinden, niet gewoon de afgeleide van de teller kunt delen door die van de noemer. Door eerst herleiden vind je de juiste afgeleide.

a Bereken q' met behulp van de productregel en laat zien dat je de juiste afgeleide vindt.

b Bereken q' ook met behulp van de quotiëntregel en laat zien dat je de juiste afgeleide vindt.

c Bereken de afgeleide van $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ met de quotiëntregel.
Vergelijk je antwoord met dat in de uitleg.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Van een gebroken functie $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ is de functie f de teller en de functie g de noemer van de breuk. Zo'n functie is te differentiëren door haar te schrijven als $q(x) = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$ en dan de productregel in combinatie met de kettingregel te gebruiken.

Als je dan de negatieve exponenten wegwerkt en de twee breuken die je krijgt optelt, ontstaat de **quotiëntregel voor differentiëren**:

Als $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dan is $q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, soms kun je eerst de quotiëntfunctie herleiden.
Vaak komt hij in combinatie met de voorgaande differentieerregels voor. Vooral de kettingregel duikt daarbij vaak op.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x}{x-4}$.
Bepaal de afgeleide functie met behulp van de quotiëntregel.

Antwoord

Bekijk eerst de teller en de noemer afzonderlijk:

- $t(x) = 2x$ met $t'(x) = 2$
- $n(x) = x - 4$ met $n'(x) = 1$

Hieruit volgt: $f'(x) = \frac{2 \cdot (x-4) - 2x \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{-8}{(x-4)^2}$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

a Bepaal de afgeleide van f met de quotiëntregel.

b Waarom is bij deze functie de quotiëntregel het handigst?
Kan het wel op een andere manier?

Opgave 3

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

a Bepaal van deze functie de afgeleide met behulp van de quotiëntregel.

b Je kunt ook het functievoorschrift eerst herleiden. Dan hoef je de quotiëntregel niet te gebruiken. Bepaal de afgeleide zonder de quotiëntregel toe te passen. Welke van beide methodes van differentiëren is hier het handigst?

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $f(x) = \frac{5x-10}{\sqrt{4+x^2}}$.

Antwoord

Gebruik de quotiëntregel:

- $t(x) = 5x - 10$ met $t'(x) = 5$
- $n(x) = \sqrt{4+x^2} = (4+x^2)^{\frac{1}{2}}$ met $n'(x) = \frac{1}{2}(4+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

Hieruit volgt: $f'(x) = \dfrac{5 \cdot \sqrt{4+x^2} - (5x-10) \cdot \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2}$.

Vermenigvuldig nu teller en noemer met $\sqrt{4+x^2}$ en dit geeft:

$$f'(x) = \frac{5 \cdot (4+x^2) - (5x-10) \cdot x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{20+10x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$$

Opgave 4

Differentieer de functies met de quotiëntregel als dat nodig is. Probeer telkens de handigste manier van differentiëren te gebruiken.

a $f(x) = \frac{3x^2-4}{2x+1}$

b $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$

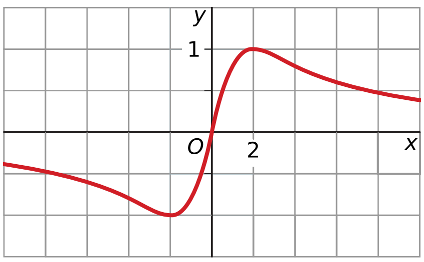
c $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{4+x^2}}$

d $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Voorbeeld 3

Je ziet een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.

Er zijn twee extremen. Bereken die met behulp van de afgeleide van f.



Figuur 1

Antwoord

De afgeleide is:

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2+4) - 4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$$

Los de vergelijking $f'(x) = 0$ op.
Let op: een breuk kan alleen maar op 0 uitkomen als de teller 0 is (en de noemer niet).
Dit betekent dat $-4x^2 + 16 = 0$.
Deze vergelijking levert op: $x = -2 \vee x = 2$.
De extremen zijn: max. $f(2) = 1$ en min. $f(-2) = -1$.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$.

a Bereken de extremen van f met behulp van differentiëren. Geef benaderingen in twee decimalen.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Verwerken

Opgave 6

Differentieer de functies.

a $f(x) = \frac{x+1}{x^2-16x}$

b $y(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$

c $H(t) = \frac{\sqrt{2t+6}}{3t}$

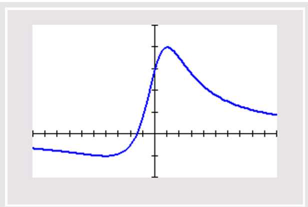
d $GTK(q) = \frac{2q^3-10q^2+60q+120}{q}$

e $A(r) = \frac{2r}{\sqrt{4r+8}}$

f $GO(p) = 200p + 400 + \frac{2000}{p}$

Opgave 7

Je ziet hier een deel van de grafiek van functie f. Het functievoorschrift is $f(x) = \frac{8x+12}{x^2+4}$.



Figuur 2

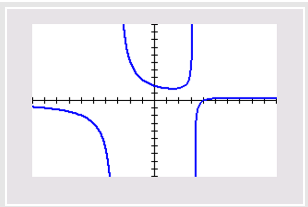
a Bereken algebraïsch de uiterste waarden van f.

b Los op: $f(x) < \frac{3}{2}$

c De grafiek van f snijdt de x-as in A en de y-as in B. Onderzoek of de lijn AB de grafiek van f raakt.

Opgave 8

Je ziet hier een deel van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{10x-40}{x^2-10}$.



Figuur 3

a Bereken met behulp van de afgeleide de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Het punt $P(0,4)$ ligt op de grafiek van f. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in dat punt.

Opgave 9

Voor de kosten van de productie van eenvoudige nietmachines heeft een bedrijf een wiskundig model laten opstellen. In dat model zijn de kosten K (in euro) afhankelijk van het aantal geproduceerde nietmachines q (in honderdtallen) volgens de formule $K = 4q^3 - 72q^2 + 600q + 2000$.

De gemiddelde totale kosten zijn de kosten per nietmachine: $GTK = \frac{K}{q}$.

a Geef een functievoorschrift van $GTK(q)$.

b De verandering van de gemiddelde totale kosten afhankelijk van q wordt bepaald door de afgeleide $\frac{\mathrm{d}GTK}{\mathrm{d}q}$. Stel een formule op voor deze afgeleide.

c Er worden maandelijks maximaal 2000 van deze nietmachines geproduceerd. Breng de grafiek van GTK in beeld op je grafische rekenmachine. Bij welke vensterinstellingen komt het bijpassende deel van de grafiek geheel in beeld?

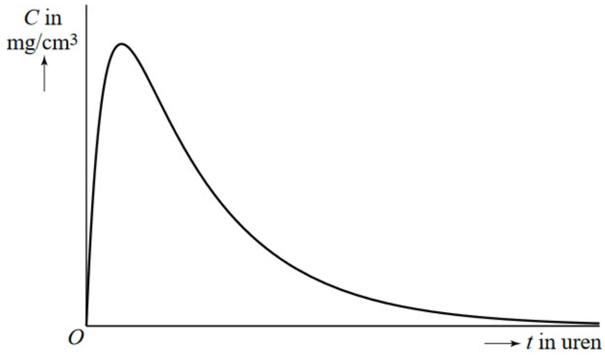
d Bij welke maandelijkse productie is GTK minimaal?

Toepassen

Opgave 10: PharmaCie

PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht.

Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af omdat de stof door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan noemen we C. In de figuur zie je een schets van de grafiek van C.
Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op die dit verloop redelijk benadert:



Figuur 4

$C(t) = \frac{16t}{190t^2+60}$

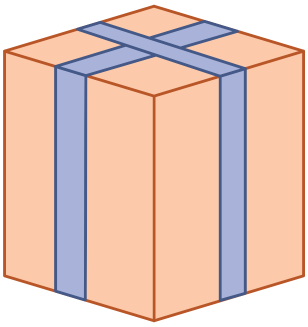
Hierin is C de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t de tijd in uur na het innemen van de pil.

Bereken met behulp van de afgeleide van C na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)

Opgave 11: Sierlinten

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte vier keer zo groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.



Figuur 5

a Stel een formule op voor de lengte L van het benodigde sierlint als functie van de breedte x van de doos.

b Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

Testen

Opgave 12

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$

b $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$

c $H(t) = \frac{2}{2+\frac{2}{t}}$

d $y(x) = \frac{x^5+1}{(1+x^2)^5}$

Opgave 13

Een bedrijfseconoom heeft voor een fabriek van kleine gereedschappen een kostenanalyse gemaakt voor de productie van zogenaamde ‘allesknippers’. Hij geeft in zijn eindrapport een grafiek waarbij volgens hem de formule: $TK = \frac{1}{3}q^3 - 5q^2 + 40q$ hoort. Hierin is TK in euro uitgedrukt en q de dagelijkse productie in tientallen.

a Stel een formule op voor de marginale kosten $MK = \frac{\mathrm{d}\,TK}{\mathrm{d}\,q}$ als functie van q.

b Bereken $MK(1)$. Wat betekent dat getal? Hoe kun je het in de grafiek van TK vinden?

c Bij welke dagproductie is MK minimaal? Bepaal deze waarde zowel met je grafische rekenmachine als met algebraïsche methoden.

d Onder de gemiddelde totale kosten verstaan economen: $GTK = \frac{TK}{q}$. Bepaal met behulp van differentiëren voor welke waarde van q de gemiddelde totale kosten minimaal zijn.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de quotiëntregel (en de andere regels)**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.