3.3 De productregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ vermenigvuldigt, krijg je een nieuwe functie die de productfunctie van f en g heet. Vaak kun je die producten uitwerken, maar niet altijd. En soms is dit gewoon te bewerkelijk.
Daarom moet je een differentieerregel hebben voor productfuncties $f(x) \cdot g(x)$.

Je leert in dit onderwerp

- de productregel voor het differentiëren van productfuncties gebruiken.

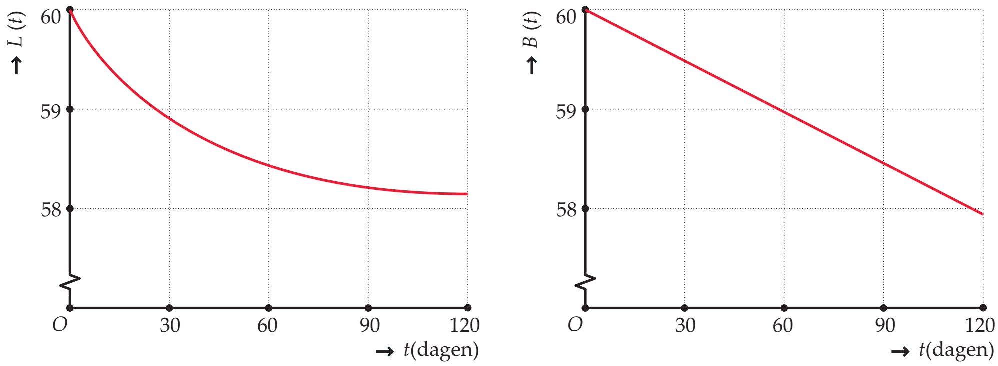
Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel en de kettingregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In deze grafieken zie je hoe de lengte L en de breedte B van een plank van 60 cm bij 60 cm in de loop van de tijd veranderen.



Figuur 1

a In welke periode krimpt de plank in de lengte sneller dan in de breedte?

b Op $t = 0$ is de plank vierkant. Tijdens het krimpen verandert de verhouding tussen lengte en breedte. Na hoeveel dagen is de plank opnieuw ongeveer vierkant?

c Op $t = 90$ is de lengte van de plank 58,3 cm en de breedte van de plank 58,5 cm. De plank krimpt dan in de lengte met 0,007 cm per dag en in de breedte met 0,017 cm per dag. Met hoeveel cm per dag verandert de oppervlakte dan?

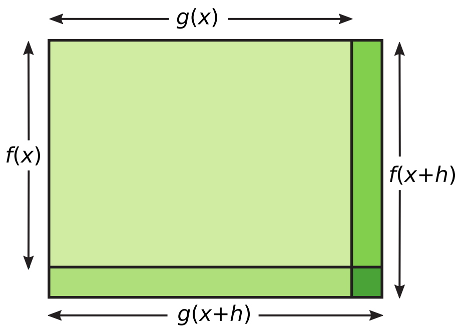
Uitleg

Je wilt een product van twee functies differentiëren. Je probeert $p(x) = x^2 \cdot x^3$ hieruit volgt $p'(x) = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$.

Maar je weet: omdat $p(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5$ is $p'(x) = 5x^4$.

Dus je eerste probeersel was fout, je moet de functie eerst herleiden. Maar herleiden kan niet altijd. Hoe kun je dan toch productfuncties differentiëren?

Bekijk de figuur. Als de lengte en breedte van een rechthoek functies van x zijn, is de oppervlakte A een productfunctie: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$



Figuur 2

Je kunt de oppervlakte van deze rechthoek variëren door x te laten toenemen tot $x + h$. De nieuwe oppervlakte wordt dan: $A(x + h) = f(x + h) \cdot g(x + h)$

Je ziet dat de toename (van $A(x)$ naar $A(x + h)$) uit drie rechthoekjes bestaat:

- een rechthoekje met een oppervlakte van $f(x) \cdot (g(x + h) - g(x))$.
- een rechthoekje met een oppervlakte van $g(x) \cdot (f(x + h) - f(x))$.
- een klein rechthoekje, waarvan de oppervlakte heel snel 0 wordt als h naar 0 nadert. Dat rechthoekje mag je daarom weglaten.

Deel je die toename door h, dan geldt:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Nu is $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$ en $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ als $h \to 0$.

En dus krijg je: $A'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$.

Dit heet de productregel voor differentiëren.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de productfunctie $p(x) = x^2 \cdot x^3$.

a Bepaal met de productregel de afgeleide van p.
Ga na, dat je nu het juiste antwoord krijgt.

Gegeven is de productfunctie $p(x) = x^4 \cdot x^5$.

b Bepaal de afgeleide van p met de productregel die je in de uitleg ziet.

Bij deze eenvoudige productfunctie kun je beter eerst $p(x)$ herleiden en daarna pas differentiëren.

c Laat zien dat je op deze manier hetzelfde krijgt als bij b.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de productregel voor differentiëren **productregel voor differentiëren**:
Als $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, dan is $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Deze differentieerregel is lang niet altijd nodig, soms kun je haakjes wegwerken.
Maar vooral als je te maken krijgt met productfuncties waarbij de éne functie bijvoorbeeld een kwadratische functie is en de andere een wortelfunctie, dan gebruik je de productregel.

Vaak komt deze regel in combinatie met de voorgaande differentieerregels voor. Soms moet je binnen de productregel ook nog de kettingregel gebruiken.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $p(x) = \left(x^3 - 6x^2\right)\left(x^4 - 1\right)$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $f(x) = x^3 - 6x^2$ waarvoor geldt: $f'(x) = 3x^2 - 12x$
- $g(x) = x^4 - 1$ waarvoor geldt: $g'(x) = 4x^3$

De afgeleide van p vind je door de productregel toe te passen:
$p'(x) = \left(3x^2 - 12x\right)\left(x^4 - 1\right) + \left(x^3 - 6x^2\right)\left(4x^3\right)$
Na haakjes wegwerken: $p'(x) = 7x^6 - 36x^5 - 3x^2 + 12x$.
Hier had je de productregel kunnen vermijden door direct de haakjes van functie p weg te werken.

Opgave 2

De functie $f(x) = x^2\left(x^3 - 4x\right)$ kun je opvatten als een productfunctie van $u(x)$ en $v(x)$. Bij het differentiëren kun je dan de productregel gebruiken.

a Noteer de functies $u(x)$ en $v(x)$.

b Bepaal de afgeleide van f met behulp van de productregel.

c Je kunt deze functie ook zonder de productregel differentiëren. Je moet dan eerst de haakjes wegwerken. Differentieer de functie ook op deze manier.

Voorbeeld 2

Differentieer de functie: $h(x) = x(2x+1)^3$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $f(x) = x$ waarvoor geldt $f'(x) = 1$.
- $g(x) = (2x+1)^3$ waarvoor geldt $g'(x) = 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2$. Hierbij gebruik je de kettingregel.

De afgeleide van h vind je door de productregel toe te passen:

$h'(x) = 1 \cdot (2x+1)^3 + x \cdot 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2 = (2x+1)^3 + 6x(2x+1)^2$
Overigens had je ook hier eerst de haakjes van functie h weg kunnen werken en zonder productregel kunnen differentiëren.

Opgave 3

Vaak heb je behalve de productregel ook de kettingregel nodig. Bijvoorbeeld bij het differentiëren van de functie $f(x) = \left(x^2 + 3x\right)\left(x^2 + 10\right)^3$. Beschouw deze functie als het product van $u(x) \cdot v(x)$. Dan geldt $f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

a Bepaal de afgeleide van $u(x) = x^2 + 3x$.

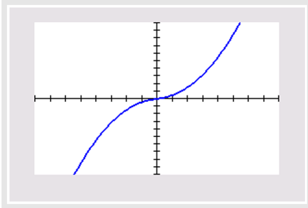
b Bepaal de afgeleide van $v(x)$.

c Bepaal met de productregel de afgeleide van f. Je hoeft de functie niet te herleiden.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

Bereken met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in (0,0).



Figuur 3

Antwoord

De afgeleide vind je met behulp van de productregel (en de kettingregel):

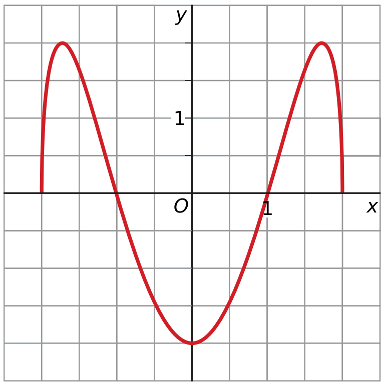
$f(x) = x \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 1 \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

Omdat je hier alleen $x = 0$ moet invullen, is verder herleiden zinloos: $f'(0) = 1$.
De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in (0,0) is $y = x$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = (x^2-1) \cdot \sqrt{4-x^2}$.
Bekijk de volledige grafiek van deze functie.



Figuur 4

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Met behulp van deze afgeleide kun je algebraïsch de extremen van f berekenen. Laat zien hoe dit in zijn werk gaat.

c De grafiek van f gaat door het punt (1,0). Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

Verwerken

Opgave 5

Bepaal van deze functies de afgeleide.

a $f(x) = (x^3+6)(4x^2-5x)$

b $g(x) = (10-x) \cdot \sqrt{x}$

c $R(t) = 3t(t+5)^4$

d $y(x) = x \cdot \sqrt{5+x^2}$

e $y(x) = x - \sqrt{5+x^2}$

f $V(r) = \left(100 - \frac{5}{r}\right)(20-r)^2$

Opgave 6

Gegeven zijn de functies: $y_1(x) = x^2$ en $y_2(x) = (2x-8)^4$.
De functie $f(x) = y_1(x) \cdot y_2(x)$ is de productfunctie van beide.

a De nulpunten van f kun je uit de grafieken afleiden. Welke nulpunten heeft de grafiek van f?

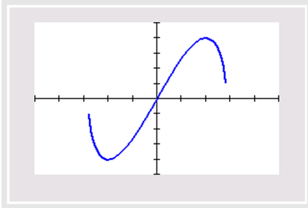
b Toon aan dat $f'(x) = (2x-8)^3(12x^2-16x)$.

c Bepaal met behulp van de afgeleide functie de extremen van f.

d Voor welke waarden van k heeft de vergelijking $f(x) = k$ precies vier oplossingen?

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$ die is gemaakt door een grafische rekenmachine.



Figuur 5

a De grafiek is onvolledig. Dat kun je bijvoorbeeld zien aan de nulpunten van deze functie. Welke nulpunten heeft de grafiek van f?

b Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in (0,0).

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = 0{,}25x^2 - x\sqrt{x}$.

a Bereken algebraïsch het bereik van f.

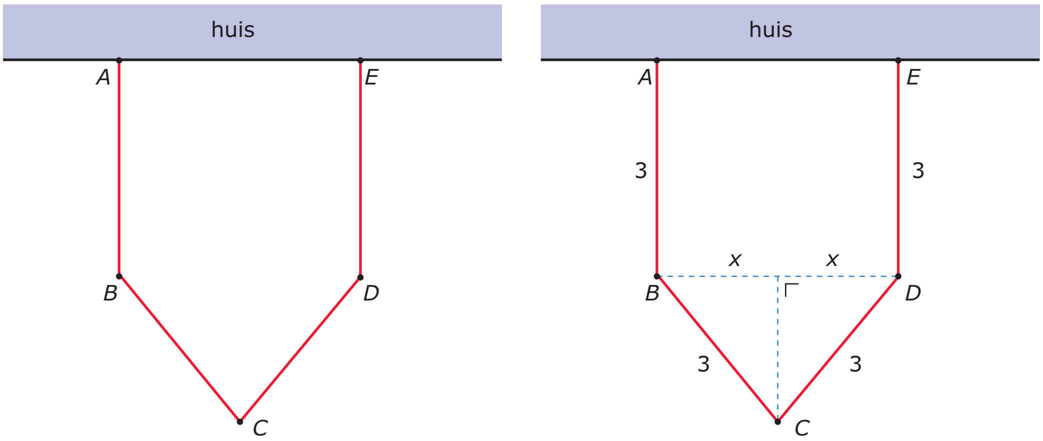
b Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f.

c In welk punt van de grafiek van f heeft de raaklijn een richtingscoëfficiënt van 2?

Toepassen

Opgave 9: Serre aanbouwen

Iemand wil met behulp van een viertal even grote rechthoekige kozijnen een serre aan zijn huis bouwen. Elk van die kozijnen is 2,5 meter hoog en 3 meter breed. Hij bestudeert eerst de mogelijke opstellingen waarbij twee kozijnen AB en DE loodrecht op de muur worden bevestigd. De andere twee BC en CD worden zo geplaatst dat de vloeroppervlakte van de serre maximaal wordt.



Figuur 6

a De afstand tussen de twee kozijnen die loodrecht op de muur staan is $2x$. Toon aan dat voor de vloeroppervlakte A van de serre geldt: $A(x) = 6x + x \cdot \sqrt{9 - x^2}$.

b Bereken algebraïsch de grootst mogelijke vloeroppervlakte van deze serre.

Testen

Opgave 10

Bepaal de afgeleide van de volgende functies:

a $f(x) = 6x\left(1 + x^2\right)^3$

b $H(t) = t \cdot \sqrt{1 - t^2}$

c $y(x) = (ax - 4)^2(6 - x)^3$

d $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x$.

a Bepaal de nulwaarden van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = x\left(x^2 - 10\right)^3$.

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de productregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.