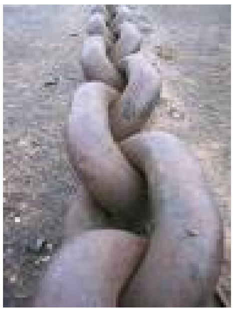
3.2 De kettingregel

Inleiding

In veel functievoorschriften komen haakjes voor.
Vaak kun je die eenvoudig uitwerken, maar niet altijd.
Met name bij samengestelde functies, zeg maar functies die als een ketting aan elkaar zijn geschakeld, is het uitwerken van haakjes vaak helemaal niet eenvoudig, of zelfs gewoon onmogelijk. Het differentiëren van dergelijke functies vereist een speciale differentieerregel.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de kettingregel voor het differentiëren van samengestelde functies;
- de kettingregel toepassen.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Bij het lozen van olie op zee ontstaat een zich cirkelvormig uitbreidende olievlek.
De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren).

Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$.

a Waarom is R een samengestelde functie?

b Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 3 uur?

c Kun je het antwoord op de vorige vraag met behulp van differentiëren vinden? En hoe dan?

Uitleg 1

Je hebt van de functie $s(x) = \left(x^2 + 10\right)^2$ de afgeleide nodig.
Differentiëren door lukt nu alleen nog door eerst de haakjes weg te werken, dit geeft:
$s(x) = x^4 + 20x^2 + 100$
en dus
$s'(x) = 4x^3 + 40x$
Dit wegwerken van de haakjes is bijna ondoenlijk als het hogere machten betreft.

Bekijk daarom de functie als een ketting van meerdere schakels:

$$x \xrightarrow{g(x)} x^2+10 \xrightarrow{f(g(x))} (x^2+10)^2$$

Figuur 2

- $s(x) = f(g(x)) = (g(x))^2$
- $g(x) = x^2 + 10$

De afgeleide $s'(x)$ bepaal je nu door schakel voor schakel te differentiëren:
$s'(x) = 2(g(x))^1 \cdot g'(x) = 2\left(x^2 + 10\right) \cdot 2x = 4x^3 + 40x$

Je gebruikt: $f'(g(x)) = 2(g(x))^1$ en $g'(x) = 2x$.

In het algemeen geldt: als $s(x) = f(g(x))$, dan is $s'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
Deze regel wordt de kettingregel genoemd.

Opgave 1

Bekijk de functie in **Uitleg 1**.
Van deze functie wordt op twee manieren de afgeleide bepaald.

a Bereken eerst zelf de afgeleide door eerst van s de haakjes weg te werken.

b Bekijk vervolgens hoe $s(x)$ in afzonderlijke schakels kan worden ontleed.
Bepaal nu de afgeleide door die afzonderlijke schakels te differentiëren.

Bekijk ook de functie $t(x) = g(f(x)) = \left(x^2\right)^2 + 10$.

c Uit welke twee schakels bestaat deze functie?

d Bereken de afgeleide van $t(x)$ op twee manieren: door eerst de haakjes weg te werken en daarna door de schakels te gebruiken. Laat zien dat beide afgeleiden hetzelfde zijn.

Opgave 2

Gegeven is de functie: $f(x) = \left(4x^2 + 2x\right)^2$.

a Uit welke twee schakels bestaat f?

b Bepaal $f'(x)$ zonder eerst de haakjes weg te werken, dus met de kettingregel.

c Bepaal $f'(x)$ door eerst de haakjes weg te werken van $f(x)$.

d Laat zien dat je bij b en bij c dezelfde afgeleide vindt.

Uitleg 2

Bij een functie als $f(x) = \left(x^2 + 10\right)^2$ (en functies die daar op lijken), heb je voor het differentiëren het werken met een ketting van functies niet nodig. Maar bij functies zoals $g(x) = \sqrt{x^2 + 10}$ kun je niet zonder. Alleen weet je nog niet hoe je functies met wortelvormen differentieert.

Daarvoor gebruik je de machtsregel. Die blijkt namelijk ook te gelden voor gebroken en/of negatieve exponenten. Hij geldt in feite voor alle reële exponenten:

Als $f(x) = x^r$, dan is $f'(x) = rx^{r-1}$ voor elke reële waarde van r.

Voor een functie als $f(x) = \sqrt{x}$ betekent dit:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

heeft als afgeleide

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Voor een functie als $f(x) = \frac{1}{x^2}$ betekent dit:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

heeft als afgeleide

$$f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{-2}{x^3}$$

En zo kun je veel functies met wortelvormen en/of gebroken vormen differentiëren.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** hoe je functies met wortelvormen en gebroken vormen vaak kunt differentiëren. Differentieer nu zelf:

a $f(x) = 2\sqrt{x}$

b $f(x) = \frac{1}{x^5}$

c $f(x) = \frac{5}{x}$

Opgave 4

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x^2 + 3$ met $x \geq 0$.

a Noteer het functievoorschrift van $h(x) = f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van h door te werken met samengestelde functies.

c Noteer het functievoorschrift van $k(x) = g(f(x))$ zo eenvoudig mogelijk. Bepaal ook hiervan de afgeleide.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **samengestelde functie** of een **kettingfunctie** is een functie die uit twee of meer in serie geschakelde functies bestaat.

$$x \xrightarrow{g(x)} u \xrightarrow{f(u)} f(g(x))$$

Figuur 3

Voor de afgeleide van een samengestelde functie kun je de kettingregel gebruiken.

- De **kettingregel voor differentiëren**:
  Als $s(x) = f(g(x))$, dan is $s'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Met behulp van deze regel kan worden bewezen dat de machtsregel voor differentiëren geldig is voor alle soorten exponenten, niet alleen maar voor gehele, positieve exponenten. Dit betekent dat je er ook de afgeleiden van wortelfuncties en gebroken functies mee kunt bepalen.
In het algemeen geldt:

- De **algemene machtsregel voor differentiëren**:
  Als $f(x) = x^r$, dan is $f'(x) = r x^{r-1}$ voor elke reële waarde van r.

Met de algemene machtsregel kun je ook wortelfuncties en gebroken functies differentiëren. Je hebt daarvoor de rekenregels voor machten nodig.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $s(x) = \left(x^2 + 2x\right)^4$.

Antwoord

Deze functie is een samengestelde functie: $s(x) = \left(x^2 + 2x\right)^4 = (g(x))^4 = f(g(x))$.
Hierin is:

- $f(g(x)) = (g(x))^4$ en hieruit volgt: $f'(g(x)) = 4(g(x))^3$
- $g(x) = x^2 + 2x$ en hieruit volgt: $g'(x) = 2x + 2$

Dit geeft:

$s'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 4(g(x))^3 \cdot g'(x) = 4 \cdot \left(x^2 + 2x\right)^3 \cdot (2x + 2) = (8x + 8)\left(x^2 + 2x\right)^3$

Opgave 5

Gegeven is de functie: $h(x) = \left(2x^2 + 1\right)^8$.

a Deze functie heeft de vorm $h(x) = f(g(x))$.
Noteer de voorschriften van f en g.

b Laat zien dat $h'(x) = 32x\left(2x^2 + 1\right)^7$.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies: $f(x) = x^4$ en $g(x) = 2x^3 + 4x$.

a Noteer het functievoorschrift van $h(x) = f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van h.

c Noteer het voorschrift van de functie $k(x) = g(f(x))$.

d Bepaal de afgeleide van k.

Voorbeeld 2

Met de algemene machtsregel kun je ook wortelfuncties en gebroken functies differentiëren. Je hebt daarvoor de rekenregels voor machten nodig.

Differentieer de functies:

- $f(x) = 10\sqrt{x}$
- $g(x) = 2x\sqrt[3]{x}$
- $h(x) = \frac{6}{2x+3}$

Antwoord

- Noteer eerst f als machtsfunctie:

  $f(x) = 10\sqrt{x} = 10x^{\frac{1}{2}}$

  Pas vervolgens de machtsregel toe:

  $f'(x) = 10 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 5x^{-\frac{1}{2}} = 5 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{\sqrt{x}}$

- Noteer eerst g als machtsfunctie:

  $g(x) = 2x\sqrt[3]{x} = 2x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2x^{1\frac{1}{3}}$

  Pas vervolgens de machtsregel toe:

  $g'(x) = 2 \cdot 1\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}-1} = 2\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} = 2\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$

- Noteer eerst h als machtsfunctie:

  $h(x) = \frac{2}{2x+3} = 6 \cdot (2x+3)^{-1}$

  Pas vervolgens de machtsregel en de kettingregel toe:

  $h'(x) = 6 \cdot -1(2x+3)^{-1-1} \cdot 2 = -6(2x+3)^{-2} = \frac{12}{(2x+3)^2}$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Differentieer zelf de bovenste twee functies zonder naar de uitwerking te kijken.

b Waarom heb je bij het differentiëren van de derde functie ook de kettingregel nodig?

c Laat bij die derde functie zien hoe de kettingregel wordt toegepast bij het differentiëren.

Opgave 8

Differentieer de functies. Noteer de afgeleiden zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

a $f(x) = 2\sqrt{x}$

b $f(x) = x\sqrt{x}$

c $f(x) = \sqrt[3]{4x}$

d $f(x) = \frac{3}{4-x}$

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
Bereken het hellingsgetal van deze functie voor $x = 1$.

Antwoord

Noteer de wortelvorm eerst als een macht:

$f(x) = \sqrt{9 - x^2} = \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = (g(x))^{\frac{1}{2}}$

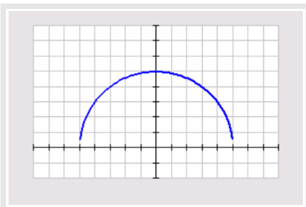
Differentieer f met de kettingregel:

$f'(x) = \frac{1}{2}(g(x))^{\frac{1}{2}-1} \cdot g'(x) = \frac{1}{2}\left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x = -x \cdot \left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

Het gevraagde hellingsgetal is: $f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{8}}$.

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ op de grafische rekenmachine.



Figuur 4

a Noteer het domein en het bereik van f. Waaraan zie je dat de grafiek niet helemaal compleet is?

b Bepaal de afgeleide van f.

c Hoe kun je met zekerheid concluderen dat deze functie een maximum voor $x = 0$ heeft?

A. De grafische rekenmachine geeft dit aan.
B. 5 is de grootste functiewaarde en die waarde zit bij $x = 0$.
C. $f'(x) = 0$ alleen als geldt $x = 0$.
D. $f'(0) = 0$ en de afgeleide gaat alleen voor $x = 0$ over van positief naar negatief.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.

Verwerken

Opgave 10

Differentieer de functies.

a $f(x) = \left(x^2 - 100\right)^4$

b $g(x) = -5 + (1 - x)^3$

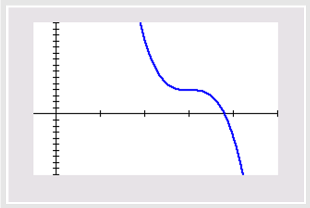
c $H(t) = 25(2 - 4t)^3$

Opgave 11

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -(2x - 6)^3 + 4$.

a De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve $x = 3$. Toon aan dat dit inderdaad het geval is.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de x-as in punt P. Bereken de coördinaten van P.


Figuur 5

Opgave 12

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$.

a Bereken algebraïsch het domein van deze functie.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van de top bij deze functie.

c Stel een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek voor $x = -1$ op.

Opgave 13

Bepaal van de functies de afgeleide. Noteer de afgeleide functie zonder negatieve of gebroken exponenten.

a $y = \sqrt[3]{x^7}$

b $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 1$

c $H(p) = \left(1 - \sqrt{p}\right)^3$

d $g(x) = 2x - \frac{5}{1-x}$

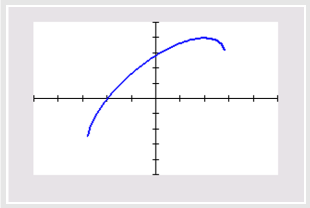
Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x + \sqrt{8 - x^2}$.

a Bepaal het domein van f.

b Bereken algebraïsch het bereik van f.

c Noem de randpunten van de grafiek van f respectievelijk A en B. Voor welke waarde van x is het hellingsgetal van de grafiek van f gelijk aan dat van lijn AB?

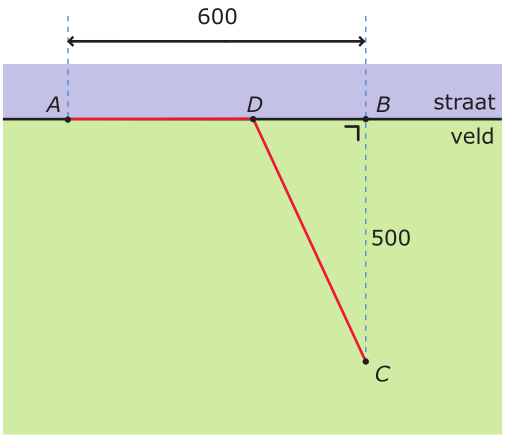

Figuur 6

Toepassen

Opgave 15: Waterleiding aanleggen

Vanuit punt A moet een waterleiding gelegd worden naar punt C. Langs de straat bedragen de kosten € 30,00 per meter en door het veld € 70,00 per meter. De lengte van AB is 600 meter en de lengte van BC is 500 meter. Er zijn verschillende mogelijkheden om de waterleiding aan te leggen.

- Langs de straat tot aan punt B en vervolgens door het aangrenzende terrein naar punt C.
- Direct vanuit A door het veld, in een rechte lijn naar C.
- Of een van de vele tussenmogelijkheden: de leiding wordt dan voor een gedeelte langs de straat aangelegd, tot aan punt D en vervolgens vanaf de straat naar punt C.



Figuur 7

a Hoeveel bedragen de kosten als je voor de eerste mogelijkheid kiest?

b Hoeveel bedragen de kosten als je voor de tweede mogelijkheid kiest?

c Bekijk de derde mogelijkheid. Neem voor de lengte van BD de variabele x. Druk nu de kosten voor de aanleg van deze waterleiding uit in x.

d Hoe moet je de waterleiding aanleggen opdat de kosten minimaal zijn? Bereken de minimale kosten met behulp van de afgeleide.

Testen

Opgave 16

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 6\left(1 + x^2\right)^3$

b $y(x) = (1 - 4x)^4 + 5$

c $R(t) = \sqrt{\frac{15}{\pi} t}$

d $f(x) = \sqrt{10 + 4x^2}$

e $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$

f $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 17

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x + 2}$.

a Als je de grafiek van deze functie op je grafische rekenmachine bekijkt met de standaardinstellingen van het venster, lijkt het wel een rechte lijn te zijn. Wat is het domein van f?

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp deze afgeleide het minimum van f.

d Wat is het bereik van deze functie f?

e Bereken de hellingwaarde van de grafiek van f in het punt waar deze grafiek de y-as snijdt.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de kettingregel en de algemene machtsregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.