3.1 Differentieerregels

Inleiding

De afgeleide van een functie geeft de helling van de grafiek in een punt weer. Het is ook een maat voor de veranderingssnelheid van de functiewaarde voor een bepaalde waarde van x. Je bepaalt een afgeleide door te differentiëren. Dat lijkt tot nu toe misschien een eenvoudige klus. Maar wanneer de functies ingewikkelder worden moet je er speciale **differentieerregels** voor toepassen. Je herhaalt eerst nog even de al bekende technieken.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- differentiëren met de machtsregel en de somregel;
- het belang van die differentieerregels inzien en ze toepassen.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al differentiëren.
Neem nu de functies f en g met $f(x) = 6x^5$ en $g(x) = 2x^3$.

Bepaal de afgeleide van:

a $f_1(x) = f(x) + g(x)$

b $f_2(x) = f(x) - g(x)$

c $f_3(x) = f(x) \cdot g(x)$

d $f_4(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Voor functie f_1 (de som van f en g) geldt dat de afgeleide gelijk is aan de som van de afgeleiden van f en g.

e Kun je voor f_2, f_3 en f_4 iets vergelijkbaars opschrijven?

Uitleg

De afgeleide functie (ook wel de hellingsfunctie genoemd) geeft de helling van de grafiek aan.

- Als $f(x) = x^3$, dan is de afgeleide functie: $f'(x) = 3x^2$.
- Als $g(x) = x^2$, dan is de afgeleide functie: $g'(x) = 2x$.
- Als $h(x) = 2x^3 - x^2 + 5$, dan is de afgeleide functie: $h'(x) = 6x^2 - 2x$.

Je maakt hierbij gebruik van de constanteregel, de machtsregel en de somregel/verschilregel.

Deze regels zijn niet toereikend om alle functies te differentiëren. Alleen functies die je kunt herleiden tot een som en/of verschil van machtsfuncties kun je met deze regels differentiëren.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Welke differentieerregels pas je toe bij het bepalen van de afgeleide van $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 12$? Bereken die afgeleide.

b Welke betekenis heeft de afgeleide van een functie?

c Hoe gebruik je de afgeleide om de extremen van een functie te berekenen? Bereken de extremen van f.

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2$ en $g(x) = x^2$.

a Differentieer $k(x) = f(x) \cdot g(x)$.

b Differentieer $l(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

c Waarom kun je $m(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ nog niet differentiëren?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **afgeleide functie** van een functie $y = f(x)$ is te bepalen door te **differentiëren**. Je kent al een aantal **differentieerregels**:

- De **machtsregel**:
  Als $f(x) = cx^n$, dan is $f'(x) = ncx^{n-1}$ voor elke c en voor gehele, positieve n.
- De **constanteregel**:
  Als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.
- De **somregel/verschilregel**:
  Als $f(x) = u(x) \pm v(x)$, dan is $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Deze differentieerregels heb je nodig om **hellingswaarden** van som/verschil van machtsfuncties (met n geheel en positief) te berekenen. Heb je daarentegen met andere functies te maken, dan zijn ook andere differentieerregels nodig.

Toepassingen van de afgeleide functie zijn het bepalen van extreme waarden en het opstellen van de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek.

De hellingswaarde in een punt $P(p,f(p))$ is de **richtingscoëfficiënt van de raaklijn** in dat punt aan de grafiek: $a = f'(p)$ als de raaklijn $y = a \cdot x + b$ is.

Extreme waarden zijn maxima en minima en die treden op in toppen van de grafiek, waar de helling vaak 0 is. De extremen van $f(x)$ vind je door $f'(x) = 0$ op te lossen en dan de grafiek te bekijken in de buurt van de gevonden x-waarden.

Voorbeeld 1

Differentieer de functies:

- $f(x) = 31{,}7$
- $f(x) = 7x^4$
- $f(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 2x + 100$
- $A(r) = 20\pi r + 2\pi r^2$
- $s(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$
- $f(x) = a^2x^4 - 2bx^2 + c^3$

Antwoord

- $f'(x) = 0$
- $f'(x) = 28x^3$
- $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 2$
- $A'(r) = 20\pi + 4\pi r$ (π is een constante.)
- $v(t) = s'(t) = v_0 + at$ (v_0 en a zijn constanten.)
- $f'(x) = 4a^2x^3 - 4bx$ (b en c zijn constanten.)

Opgave 3

Differentieer.

a $f(x) = 6 - \frac{1}{2}x^3$

b $TK(q) = 2q^3 + 60q^2 - 100q + 50$

c $I(d) = \frac{1}{6}\pi d^3 + a^2$

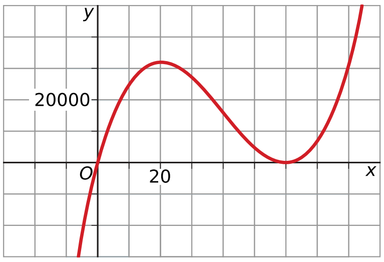
d $f(x) = x(x - 20)$

e $T(p) = a^2p^3 - ap + a^4$

f $f(x) = x(x + 4)^2$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = x(60 - x)^2$.
Bereken algebraïsch de extremen van f.



Figuur 2

Antwoord

Bekijk de grafiek van f. Er lijken twee extremen te zijn. In die twee extremen is de helling van de grafiek 0. Die helling wordt bepaald door de afgeleide van f.
Werk eerst haakjes weg om de afgeleide te kunnen bepalen.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(60 - x)^2 \\ &= x(60 - x)(60 - x) \\ &= x\left(3600 - 120x + x^2\right) \\ &= 3600x - 120x^2 + x^3 \end{aligned}$$

De afgeleide is $f'(x) = 3600 - 240x + 3x^2$.
Om de extremen te bepalen stel je de afgeleide gelijk aan 0: $f'(x) = 3600 - 240x + 3x^2 = 0$.
Dit geeft $x = 20 \vee x = 60$.
Bekijk nu de grafiek: de extremen zijn max. $f(20) = 32000$ en min. $f(60) = 0$.

Opgave 4

Bekijk de grafiek van de functie f in **Voorbeeld 1**.

a Om zelf de grafiek zo in beeld te krijgen, bepaal je eerst algebraïsch de nulpunten van de functie. Vervolgens kijk je naar de tabel en stel je het venster van de grafische rekenmachine in. Welke instellingen geven (ongeveer) hetzelfde deel van de grafiek te zien?

b Los op $f'(x) = 0$ en bereken de extremen van f.

c Hoe groot is de hellingswaarde van de grafiek van f voor $x = 10$?

Voorbeeld 3

De kosten voor de productie van een bepaalde stof worden weergegeven door:
$TK = 10q^3 - 60q^2 + 130q$
Daarin stellen q de productie in honderden kilogram per dag en TK de totale kosten in euro voor.
Bepaal bij welke productie de afgeleide van TK minimaal is.
Welke economische betekenis heeft het antwoord?

Antwoord

De afgeleide van TK is: $\frac{\mathrm{d}TK}{\mathrm{d}q} = TK'(q) = 30q^2 - 120q + 130$.

Een minimum van deze hellingsfunctie vind je door de afgeleide ervan te bekijken:

- $TK''(q) = 60q - 120 = 0$ als $q = 2$.
- TK'' is negatief als $q < 2$ en positief als $q > 2$.

Bekijk je de grafiek van TK met q van 0 tot 6, dan zie je dat de grafiek voortdurend stijgt. Maar de stijging is eerst afnemend (tot in de buurt van $q = 2$) en daarna toenemend. Er is inderdaad een kleinste hellingsgetal.

TK' is minimaal als $q = 2$, dat is bij een productie van 200 kg per dag.
Economisch gezien betekent dit dat bij een productie van 200 kg per dag de kostenstijging per extra kg stof het kleinst is.

Opgave 5

Voor de kosten van de productie van eenvoudige nietmachines heeft een bedrijf een wiskundig model laten opstellen. In dat model zijn de kosten K (euro) afhankelijk van het aantal geproduceerde nietmachines q (in honderdtallen) volgens de formule: $K = 4q^3 - 72q^2 + 600q + 2000$.

a Hoeveel bedragen de vaste productiekosten? Waaruit zouden deze kosten kunnen bestaan?

b De verandering van de kosten afhankelijk van q wordt bepaald door de afgeleide $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q}$. Stel een formule op voor deze afgeleide.

c Er worden maandelijks maximaal 2000 van deze nietmachines geproduceerd. Breng de bijbehorende grafiek op de grafische rekenmachine in beeld. Bij welke vensterinstellingen komt het bijpassende deel van de grafiek van K geheel in beeld?

d In welk punt van de grafiek van K gaan de kosten over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend? Laat zien hoe je met behulp van differentiëren dit punt berekent.

Verwerken

Opgave 6

Differentieer de functies.

a $f(x) = 5x^6 - 13x^5 + 10x - 25$

b $f(x) = ax^2 + bx + c$

c $P(I) = RI^2$

d $y(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$

e $f(x) = -8x^8 - 88$

f $f(x) = 2ax^3 - 3a^2x + a^3$

g $A(r) = \pi r^2 + 2lr$

h $h(x) = 3x^2(10 - x)^2$

Opgave 7

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{4}{5}x^3 - 3x^2$.

a Plot de grafiek van $f(x)$ en de hellingsgrafiek van $f(x)$ in één scherm.

b Hoe zie je aan de hellingsgrafiek waar de extremen van $f(x)$ zich bevinden?

c Bereken algebraïsch de extremen van f.

d Bereken de hellingwaarde van de grafiek van f voor $x = 5$.

e Bereken algebraïsch de coördinaten van het punt van de grafiek van f waarin de helling minimaal is.

Opgave 8

Het punt (2,0) ligt op de grafiek van de functie $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

a Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dit punt aan de grafiek.

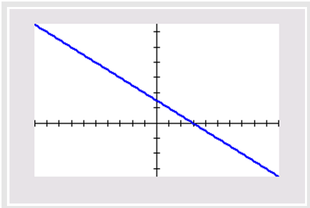
b In hoeveel andere punten van de grafiek heeft de raaklijn dezelfde richtingscoëfficiënt?

Opgave 9

Bekijk de grafiek van $f'(x)$ met op beide assen dezelfde schaalverdeling. Het nulpunt van deze hellingsgrafiek is (3,0).

a Wat betekent dit voor de grafiek van $f(x)$?

b Welke vorm heeft de grafiek van $f(x)$?



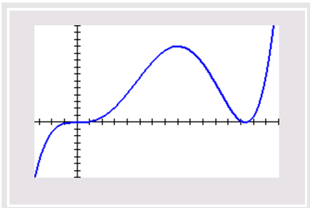
Figuur 3

Opgave 10

Bekijk de grafiek van $f(x) = x^3(x - 20)^2$.

a In het deel van de grafiek dat in beeld is, bevinden zich drie punten waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is aan de x-as. Bereken de x-coördinaten van die drie punten algebraïsch.

b Waarom heeft de functie f toch maar twee (lokale) extremen?



Figuur 4

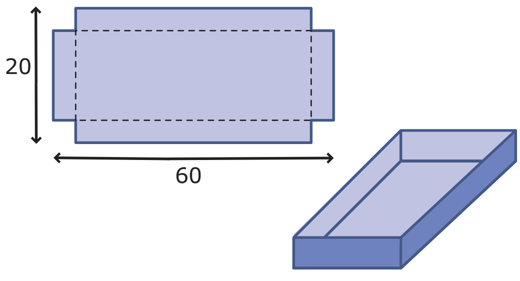
Toepassen

Opgave 11: Bakje met maximale inhoud

Uit een stuk karton van 20 bij 60 centimeter wordt een bakje gevouwen. Neem voor de hoogte van dit bakje x centimeter.

a De inhoud I van dit bakje hangt alleen af van x (als er verder niets boven het open bovenvlak mag uitsteken). Stel een bijpassend functievoorschrift $I(x)$ op.

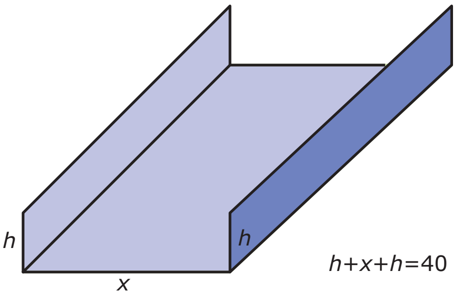
b Bereken algebraïsch bij welke waarde van x de inhoud van het bakje maximaal is.



Figuur 5

Opgave 12: Goten voor bevloeien van akkers

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. De goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. De platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek.



Figuur 6

a Noem de breedte van de goot x en de hoogte h. Welke verband bestaat er tussen x en h? Stel een formule voor dat verband op.

b Je kunt nu een formule opstellen voor de hoeveelheid water die zo'n goot kan bevatten. Druk de hoeveelheid water H in uit in x.

c Bereken bij welke waarde van x de hoeveelheid water maximaal is.

Testen

Opgave 13

Differentieer de volgende functies:

a $f(x) = -0{,}5x^4 + 3x$

b $f(x) = 10 - 6x^2 - x^4$

c $f(x) = (x-1)(x^2-1)$

d $f(x) = ax(1-x^2)$

e $H(t) = 3p^2 + 4pt^3$

f $y(t) = 20t^2(10-t)(15+t)$

Opgave 14

Het punt (2,7) ligt op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

a Controleer deze bewering met een berekening.

b Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (2,7).

Opgave 15

Bekijk de grafiek van de functie $y = -x^3 + 6x^2 - 10$.

a De grafiek heeft twee (lokale) extremen. Bereken beide extremen.

b Bereken het punt van de grafiek tussen de twee toppen waarin de hellingswaarde het grootst is.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.