2.4 Buigpunten

Inleiding

Zodra de helling van de grafiek overgaat van toenemende stijging (of daling) naar afnemende stijging (of daling), of omgekeerd, spreek je van een buigpunt. In zo'n buigpunt heeft de helling een (lokaal) maximum of minimum. Je vindt buigpunten dus door naar de extremen van de afgeleide te zoeken.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de extremen van een afgeleide bepalen met behulp van de tweede afgeleide;
- het berekenen van buigpunten toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van differentiëren.

Verkennen

Opgave V1

Bij de productie van grote aantallen van een artikel hangen de kosten af van de productieomvang q. Bij een toenemende productieomvang stijgen soms in het begin de kosten steeds langzamer, terwijl ze bij grotere waarden van q weer sneller gaan stijgen (bijvoorbeeld omdat er vanaf een zekere productieomvang duurdere apparatuur en/of duurdere arbeidskrachten nodig zijn).

De kostenfunctie $TK = 0{,}1q^3 - q^2 + 4q$ beschrijft zo'n situatie.

De afgeleide van deze functie wordt in de economie de marginale kostenfunctie MK genoemd.

a Stel een formule op voor MK.

b Hoe kun je uit MK het beschreven verloop van TK afleiden?

c Waarom zou je het punt waar MK minimaal is een buigpunt noemen?

Uitleg

Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 20x^2 + 150x + 100$.
De functiewaarden stijgen voortdurend:

- ongeveer tot $x = 7$ is er afnemende stijging;
- ongeveer vanaf $x = 7$ is er toenemende stijging.

Het punt waarin de helling overgaat van toenemend naar afnemend (of omgekeerd) heet een buigpunt van de grafiek.

Om dit buigpunt te schatten, kijk je naar het verloop van de helling van de grafiek. Die helling neemt eerst af en daarna weer toe. Zij heeft een minimale waarde bij het buigpunt. Om het buigpunt exact te berekenen zoek je een minimum van de afgeleide.

Figuur 2

De afgeleide is: $f'(x) = 3x^2 - 40x + 150$.
Een minimum van deze functie vind je door differentiëren. Bepaal de afgeleide van f', de afgeleide van de afgeleide dus. Je spreekt dan van de tweede afgeleide die je aangeeft met f''.
Hier is $f''(x) = 6x - 40$.

Los eerst op: $f''(x) = 6x - 40 = 0$.

Dit geeft $x = \frac{40}{6} \approx 6{,}67$.

Maak eventueel een tekenschema van de tweede afgeleide.

De tweede afgeleide wisselt bij $x \approx 6{,}67$ van teken, er is een buigpunt met $f(6{,}67) \approx 507{,}41$.
Het buigpunt is $(6{,}67; 507{,}41)$.

Opgave 1

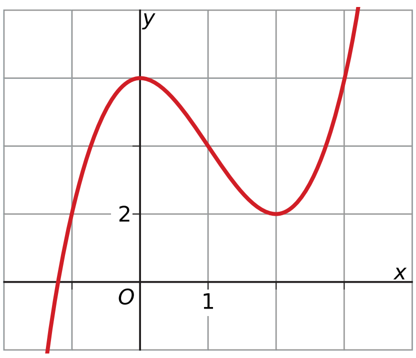
In de **Uitleg** zie je wat een buigpunt van een grafiek is en hoe je dit buigpunt kunt berekenen.

a Voer de berekening zelf uit en bepaal het buigpunt in breuken, dus zonder af te ronden.

b Is in dit buigpunt ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 0? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Bekijk de figuur met een deel van de grafiek van
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$.



Figuur 3

a Zolang $x < 1$ wordt de helling van de grafiek steeds kleiner. Wat betekent dit voor de afgeleide van de hellingsfunctie $f'(x)$?

A. Die is dan dalend.
B. Die is dan negatief.
C. Die heeft dan een minimum.

b Het punt $(1,4)$ van de grafiek van f noem je een buigpunt omdat de helling daar overgaat van dalend in stijgend. Wat weet je van de afgeleide in dit buigpunt? En van de afgeleide van de afgeleide?

A. De afgeleide is minimaal, de afgeleide van de afgeleide is 0.
B. De afgeleide is minimaal, de afgeleide van de afgeleide ook.
C. De afgeleide is negatief, de afgeleide van de afgeleide is 0.
D. De afgeleide is 0, de afgeleide van de afgeleide is minimaal.

c De afgeleide van de afgeleide noem je de tweede afgeleide van de gegeven functie. Met behulp van de tweede afgeleide kun je het buigpunt met de hand berekenen. Laat zien hoe dat gaat.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

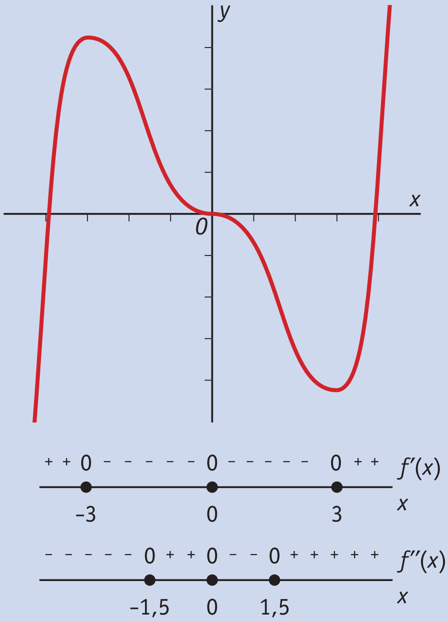
Bij toenemende stijging (daling) of afnemende stijging (daling) kijk je naar de veranderingen van de helling:

- Bij toenemende stijging wordt de helling steeds groter: f' stijgt. De afgeleide van f' is dan positief.
- Bij toenemende daling wordt de helling steeds kleiner: f' daalt. De afgeleide van f' is dan negatief.
- Bij afnemende stijging wordt de helling steeds kleiner: f' daalt. De afgeleide van f' is dan negatief.
- Bij afnemende daling wordt de helling steeds groter: f' stijgt. De afgeleide van f' is dan positief.

De afgeleide van f' heet de **tweede afgeleide** van f.

De tweede afgeleide noteer je als: f'' of $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ (spreek uit: ‘d twee y d x-kwadraat’).

Het punt waarin de helling overgaat van toenemend naar afnemend (of omgekeerd) heet een **buigpunt** van de grafiek. Je vindt die buigpunten door naar de extremen van de afgeleide te zoeken. Dat doe je met behulp van de tweede afgeleide.



Figuur 4

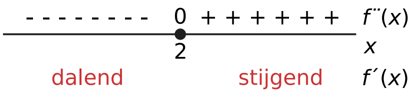
Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 2x + 3$.
Onderzoek of de grafiek van deze functie een buigpunt heeft.
Zo ja, bereken de coördinaten ervan.

Antwoord

Bepaal eerst de afgeleide: $f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 2$
Je vindt een buigpunt door de extremen van de afgeleide te bepalen.
Differentieer daarom deze afgeleide nog eens: $f''(x) = 3x - 6$.

Los op: $f''(x) = 3x - 6 = 0$.
Dit geeft $x = 2$.
Maak een tekenschema:



Figuur 5

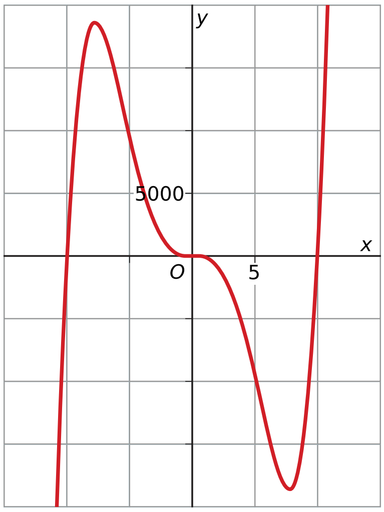
De tweede afgeleide wisselt bij $x = 2$ van teken, er is een buigpunt met $f(2) = -1$.
Het buigpunt is $(2, -1)$.

Opgave 3

Functies kunnen meerdere buigpunten hebben. Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3(x^2 - 100)$.

a Bereken met behulp van differentiëren de extremen van deze functie.

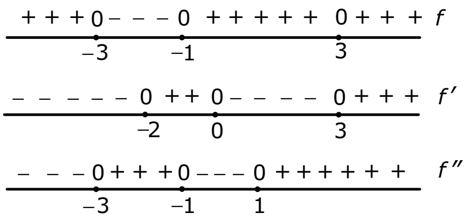
b Bereken met behulp van de tweede afgeleide de buigpunten van deze grafiek.



Figuur 6

Opgave 4

Van een functie zijn de tekenschema's van $f(x)$, $f'(x)$ en $f''(x)$ gegeven door de figuren.



Figuur 7

a Hoeveel buigpunten boven de x-as heeft de grafiek van f?

b Schets een mogelijke grafiek van f.

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 10$.

a Bereken de buigpunten van f met de hand.

b Laat ook zien dat uit de functievoorschriften van de afgeleide en de tweede afgeleide volgt dat de grafiek van f op $\langle 0,1 \rangle$ toenemend dalend is.

Voorbeeld 2

Bij de productie van grote aantallen van een artikel hangen de kosten af van de productieomvang q. Bij een toenemende productieomvang stijgen soms in het begin de kosten steeds langzamer, terwijl ze bij grotere waarden van q weer sneller gaan stijgen (bijvoorbeeld omdat er vanaf een zekere productieomvang duurdere apparatuur en/of duurdere arbeidskrachten nodig zijn).

De kostenfunctie $TK = 0{,}1q^3 - q^2 + 4q$ beschrijft zo'n situatie.

De afgeleide van deze functie wordt in de economie de marginale kostenfunctie MK genoemd. Hoe kun je uit MK het beschreven verloop van TK afleiden?

Antwoord

$MK = 0{,}3q^2 - 2q + 4$

MK stelt de hellingsfunctie van TK voor. Als je daarvan de grafiek bekijkt, zie je dat $MK > 0$ en dat MK in het begin afneemt en later weer toeneemt.

Het minimum van MK bereken je door $MK' = TK'' = 0$ op te lossen. Je vindt $q = 3\frac{1}{3}$.

Tot $q = 3\frac{1}{3}$ is $MK > 0$ en MK dalend. Voor TK betekent dit een afnemende stijging.

Voorbij $q = 3\frac{1}{3}$ is $MK > 0$ en MK stijgend. Voor TK betekent dit een toenemende stijging.

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

a Laat zien dat de marginale kosten voor $q = 0$ positief zijn.

b Laat met een berekening zien voor welke waarde van q de marginale kosten minimaal zijn. Welke economische betekenis heeft dit?

c Waarom betekent $TK' = MK > 0$ en $MK' < 0$ dat TK een afnemende stijging vertoont?

Opgave 7

Vaak is de opbrengst TO (euro) bij de productie van een artikel afhankelijk van de arbeidstijd a in uren per dag.

Een verband kan worden beschreven door de functie $TO(a) = -\frac{1}{3}a^3 + 8a^2$.

a Bekijk de grafiek van TO. De opbrengst stijgt in het begin progressief (steeds sterker). Schat tot hoeveel arbeidstijd dat ongeveer zo is.

b Het antwoord op a kun je nauwkeurig berekenen met behulp van differentiëren. Laat zien hoe dat gaat.

c Hoeveel bedraagt de grootste opbrengststijging per extra arbeidsuur?

Verwerken

Opgave 8

Bepaal met behulp van differentiëren van de volgende functies alle buigpunten met de hand. Rond je antwoorden niet af.

a $f(x) = 0{,}5x^3 + 6x^2 - 90$

b $f(x) = 4x^2 - 0{,}5x^4$

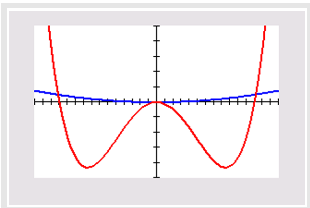
Opgave 9

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 0{,}25x^2(x^2 - 144)$.

a Bekijk hoe de grafieken van beide functies er op de grafische rekenmachine uit kunnen zien. Hoe moet je het venster dan instellen?

b Los op: $f(x) > g(x)$.

c Bereken de buigpunten van de grafiek van g. Rond je antwoorden niet af.



Figuur 8

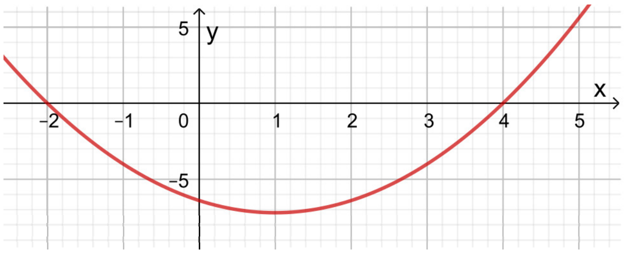
Opgave 10

Een ondernemer maakt een bepaald product waarop hij het monopolie heeft. Voor zijn productiekosten in honderden euro geldt de formule $TK = 0{,}5q^3 - 4q^2 + 11q + 4$ waarin q de geproduceerde hoeveelheid in honderden kilo's is.

a De snelheid waarmee de kosten stijgen is eerst afnemend, later toenemend. Er is een punt in de grafiek waarbij die snelheid van afnemend naar toenemend omslaat.
Bij welke productie zit het omslagpunt? Rond je antwoord af op gehele kilogrammen nauwkeurig.

b De hoeveelheid producten die hij aanbiedt aan zijn afnemers heeft invloed op de prijs. Er geldt: $p = 11 - q$ waarin p de prijs in honderden euro is. Ga ervan uit dat deze ondernemer zijn totale productie ook verkoopt. Bij welke productie is zijn winst maximaal? Licht het antwoord toe met behulp van differentiëren.

Opgave 11



Figuur 9

Bekijk de grafiek van de afgeleide van een functie, gemaakt in GeoGebra.

a Bij welke waarden van x heeft deze functie extremen?

b Bij welke waarden van x heeft de grafiek van deze functie een buigpunt?

c Heeft de raaklijn in het buigpunt een positieve of een negatieve richtingscoëfficiënt?

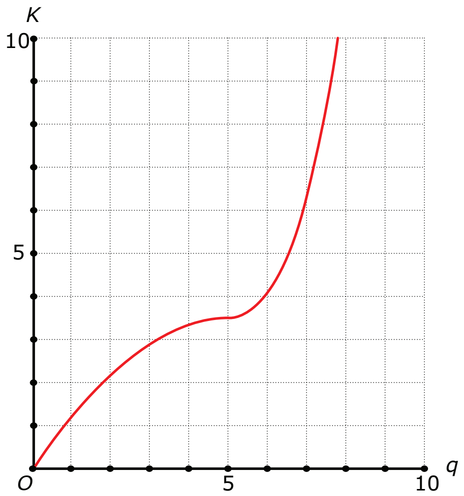
Toepassen

Opgave 12: Kurkentrekkers

In een bedrijf worden kurkentrekkers gefabriceerd. De totale kosten bij de productie kun je aflezen in de grafiek. Een wiskundige van het bedrijf heeft hierbij de volgende formules bedacht:

- $K = -0{,}1q^2 + 1{,}2q$ als $0 \leq q < 5$
- $K = 0{,}1q^3 - 1{,}1q^2 + 3{,}7q$ als $q \geq 5$

Hierin is q de productie (in duizendtallen) en K de totale kosten (in duizenden euro). De toename van de totale kosten bij een toename van de productie met één kurkentrekker noem je de marginale kosten. Deze marginale kosten mogen benaderd worden door $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q}$.



Figuur 10

a Toon door berekening aan dat de marginale kosten bij elke productie positief zijn. Hoe is dit ook uit de grafiek af te leiden?

b Toon door berekening aan dat de marginale kosten het kleinst zijn voor $q = 5$.
Hoe is dit ook uit de grafiek af te leiden? Is hier sprake van een buigpunt?

c Bereken de gemiddelde totale kosten per kurkentrekker bij een productie van 7000 stuks. Hoe kun je uit de grafiek afleiden bij welke andere productie de gemiddelde kosten per kurkentrekker even groot zijn als bij een productie van 7000 stuks? Leid deze andere productie uit de grafiek af en controleer het antwoord met de formules.

(bron: examen wiskunde A vwo 1989)

Testen

Opgave 13

Onderzoek telkens of de functie met het genoemde functievoorschrift een buigpunt heeft. Zo ja, bereken de coördinaten van dit buigpunt. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x$

b $f(x) = 0{,}25x^4 - 5x^3 + 4x^2$

Opgave 14

Van een functie f is de afgeleide gegeven door $f'(x) = 4x - 0{,}5x^2$.

a Bereken de x-waarde van het buigpunt.

b Op grond van deze afgeleide kun je een schets maken van de grafiek van de functie als je weet dat de y-waarde van het buigpunt 10 is. Maak een mogelijke schets van de grafiek van f.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het buigpunt.

Opgave 15

Een verffabriek gebruikt de functie $TK = 0{,}5q^3 - 3q^2 + 6q$ voor de productiekosten voor een bepaald soort verf. Hierin is q de hoeveelheid geproduceerde verf in duizenden liters per dag en verder stelt TK de kosten in duizenden euro voor.

a De marginale kosten zijn de meerkosten per liter die ontstaan bij de productie van 1 liter extra. Bereken de marginale kosten bij een productie van 3000 liter verf per dag met een geschikt differentiequotiënt.

b Je kunt de marginale kosten goed benaderen met behulp van de afgeleide: $MK = TK'$. Bereken ook op deze manier de marginale kosten bij een productie van 3000 liter per dag.

c De ondernemer produceert het liefst een hoeveelheid waarbij de marginale kosten minimaal zijn. Bij welke productie in liter per dag is dat het geval?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.