2.3 Extremen berekenen

Inleiding

Als je een functievoorschrift hebt, kun je met de grafische rekenmachine een bijpassende grafiek tekenen. Je kunt dan de extreme waarden door de machine laten berekenen. Nadeel daarvan is dat je vaak niet zeker weet of je alle extremen in beeld hebt. Verder kan je rekenmachine ze alleen maar benaderen. Met behulp van de afgeleide van de functie kun je extremen echt berekenen: het zijn de punten van de grafiek waarin de afgeleide overgaat van positief in negatief of omgekeerd.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- extremen berekenen met behulp van de afgeleide van een functie;
- het berekenen van extremen toepassen in praktijksituaties.

Voorkennis

- differentiëren met de machtsregel, de somregel en de constante-regel;
- werken met de diverse soorten functies;
- extremen bepalen met behulp van de grafische rekenmachine en met behulp van hellingsgrafieken.

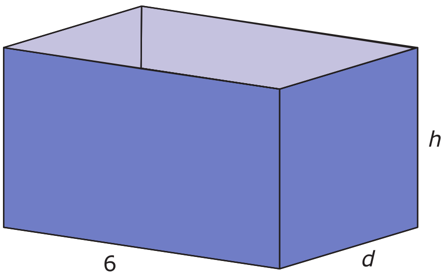
Verkennen

Opgave V1

Iemand bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte en de hoogte van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.)

Probeer dit probleem zelf op te lossen. Denk bijvoorbeeld aan het kiezen van geschikte variabelen.



Figuur 2

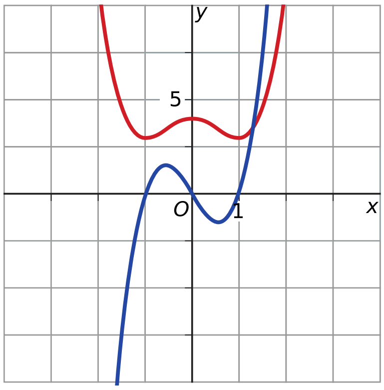
Uitleg

Bekijk de applet.

In een maximum van een grafiek gaat de grafiek over van stijgen naar dalen. De helling gaat op dat punt over van positief naar negatief. De grafiek van de afgeleide is de hellingsgrafiek en gaat op hetzelfde punt over van positief naar negatief.

Bekijk de grafiek (rood) van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$. De andere grafiek (blauw) is de grafiek van de afgeleide f', de hellingsgrafiek. Je ziet dat:

- de grafiek van f een minimum heeft als de afgeleide overgaat van negatief naar positief (voor $x = -1$ en voor $x = 1$);
- de grafiek van f een maximum heeft als de afgeleide overgaat van positief naar negatief (voor $x = 0$).

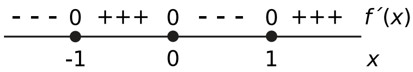


Figuur 3

Voor het bepalen van extremen gebruik je de waarden van x waar de afgeleide overgaat van positief in negatief of andersom. Dit is bij een nulpunt van de afgeleide. Als de afgeleide 0 is, heeft de grafiek van de functie een horizontale raaklijn.

De extremen van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ bereken je dus zo:

- Bereken eerst voor welke x-waarden de afgeleide 0 is:
  $f'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 4x = 0$.
  Hieruit vind je: $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$
- Maak een tekenschema van f' of bekijk de grafiek van f. Controleer of de afgeleide van teken wisselt.
- Bereken de extremen:
  minimum $f(-1) = 3$, maximum $f(0) = 4$ en minimum $f(1) = 3$.



Figuur 4

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je bij een functie de extreme waarden berekent.

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulpunten van de afgeleide.

c Maak een tekenschema van f' of bekijk de grafiek van f en bepaal de extremen van f.

Theorie en voorbeelden

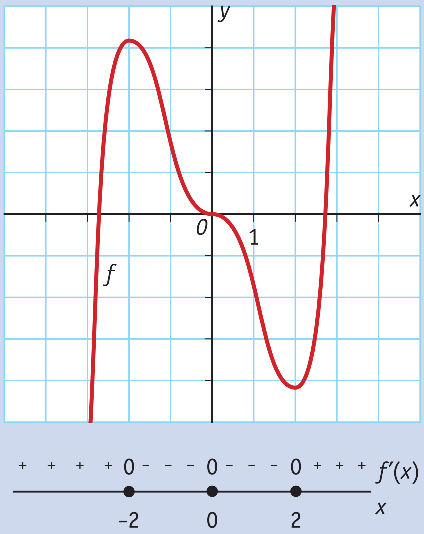
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Extreme waarden berekenen gaat bij een functie, waarvan $f(x)$ het functievoorschrift is, als volgt:

- Bepaal met behulp van differentiëren de afgeleide en los $f'(x) = 0$ op. Houd rekening met het domein van de functie.
- Bekijk de grafiek van de afgeleide of maak een **tekenschema** van de afgeleide.
- Gaat $f'(x)$ voor $x = a$ over van negatief in positief (en hoort a tot het domein van de functie), dan heeft f een minimum van $f(a)$.
- Gaat $f'(x)$ voor $x = b$ over van positief in negatief (en hoort b tot het domein van de functie), dan heeft f een maximum van $f(b)$.

Als de afgeleide niet van teken wisselt, dan is er geen sprake van een extreme waarde.



Figuur 5

Voorbeeld 1

Bereken de extremen van de functie: $f(x) = 25x^4 - 800000x - 12345$.

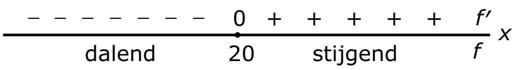
Antwoord

Dit is een functie die je niet zo makkelijk in beeld krijgt. Je werkt daarom met een tekenschema.
$f'(x) = 100x^3 - 800000$

$f'(x) = 100x^3 - 800000 = 0$ oplossen geeft: $x = \sqrt[3]{8000} = 20$.

Maak een tekenschema van de afgeleide. Door zowel links als rechts van $x = 20$ een getal te kiezen en dit in de afgeleide in te vullen zie je of de afgeleide daar positief of negatief is.
Kies bijvoorbeeld $x = 0$ en $x = 25$.

$f'(0) = -800000$ en negatief en $f'(25) = 762500$ en positief.



Figuur 6

Aan het tekenschema is te zien dat er inderdaad een extreme waarde is voor $x = 20$.
In dit geval is het een minimum: $f(20) = -12012345$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 - 120x$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Bereken de nulpunten van de afgeleide.

c Bereken de extremen van f.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^3$.

a Bereken de waarden van x waarvoor $f'(x) = 0$.

b Deze functie heeft voor $x = 0$ een horizontale raaklijn. Heeft de functie ook een extreme waarde voor $x = 0$?

c Bekijk de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{x}$. Wat is er aan de hand in $x = 0$?

A. De functie en de afgeleide hebben er beide de waarde 0, maar er is geen extreme waarde.
B. De functie en de afgeleide hebben er beide de waarde 0 en er is een minimum van $f(0) = 0$.
C. Alleen de functie heeft er de waarde 0 en $f'(0)$ is onbekend. Er is geen extreme waarde.
D. Alleen de functie heeft er de waarde 0 en $f'(0)$ is onbekend. Er is een minimum van $f(0) = 0$.

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = 100x^2$ en $g(x) = x^2 \cdot (x - 10)^2$.

a Bereken algebraïsch de snijpunten van beide grafieken.

b Bereken met behulp van differentiëren de extremen van g.

c Door welk getal moet je het getal 100 in het functievoorschrift van f vervangen, zodat de grafiek door het punt gaat waarin g een maximum heeft?

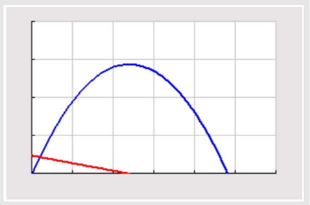
Voorbeeld 2

De opbrengst R bij de verkoop van een product hangt af van het aantal producten q dat er verkocht wordt. Niet altijd neemt de opbrengst toe als je meer verkoopt, want soms moet je om meer te kunnen verkopen de prijs per stuk laten zakken.

Voor dit product kan de opbrengst onder bepaalde economische omstandigheden worden gegeven door: $R = -q^2 + 24q$, waarin R in honderden euro en q in duizenden eenheden.

Bij welk aantal verkochte producten is de opbrengst maximaal?

Antwoord



Figuur 7

Bekijk de grafiek van R en de hellingsgrafiek van R. Het hellingsgetal van de raaklijn in een top is 0. Dit zie je ook terug in de grafiek; je ziet dat waar de hellingsgrafiek de horizontale as snijdt, de grafiek van R een maximum heeft. In het voorbeeld is dit voor $q = 12$ het geval. Deze waarde kun je ook met behulp van de afgeleide van R berekenen.

$R'(q) = -2q + 24$

Er moet gelden $R(q) = 0$, dus $-2q + 24 = 0$.

Dit geeft $q = 12$.

Conclusie: bij een verkoop van 12000 eenheden is de opbrengst maximaal.

Opgave 5

Een bedrijf maakt gebruik van een opbrengstformule $R = -2q^2 + 49q$, waarbij R de opbrengst in honderden euro is en q het aantal gefabriceerde producten in honderdtallen.

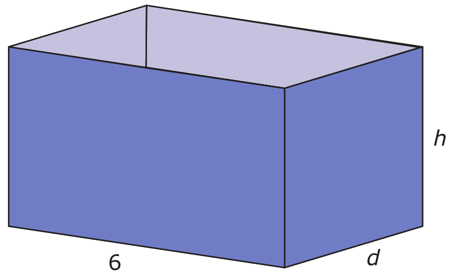
a Geef de afgeleide van $R(q)$.

b Bij welke productie is de opbrengst maximaal?

Voorbeeld 3

Alex bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte d en de hoogte h van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.)



Figuur 8

Antwoord

Noem de diepte d en de hoogte h, beide in dm.

Vanwege de inhoud van 1 m^3 = 1000 dm^3, geldt: $1000 = 6 \cdot d \cdot h$ en hieruit volgt $h = \frac{1000}{6d}$.

Voor de totale oppervlakte A in m^2 geldt: $A = 6d + 12h + 2dh$.
Als je nu de eerder gevonden uitdrukking invult in de oppervlakteformule, vind je

$$A = 6d + 12 \cdot \left(\frac{1000}{6d}\right) + 2d \cdot \left(\frac{1000}{6d}\right) = 6d + \frac{12000}{6d} + \frac{2000d}{6d} = 6d + \frac{2000}{d} + \frac{1000}{3}$$

Van deze functie van d moet je het minimum bepalen. Omdat je een functie van deze vorm nog niet kunt differentiëren, doe je dat met behulp van de grafische rekenmachine. Ga na dat je vindt: $d \approx 18{,}26$. De bijbehorende waarde voor de hoogte kun je dan ook berekenen.

Opgave 6

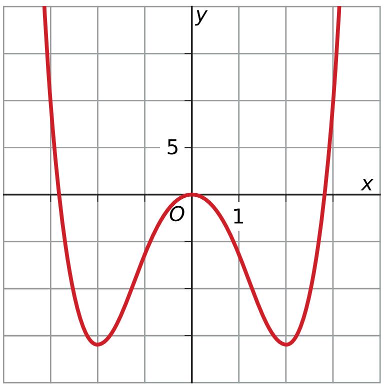
Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Licht toe dat de eerste formule voor de oppervlakte van de opbergbak juist is.

b Controleer met de grafische rekenmachine dat de minimale oppervlakte inderdaad bij $d \approx 18{,}26$ ligt.

Verwerken

Opgave 7



Figuur 9

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 8x^2$.

Bereken met behulp van differentiëren alle extremen van deze functie.

Opgave 8

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4000 - 10x^2$ en $g(x) = (x - 10)\left(x^2 - 400\right)$.

a Om de grafieken van beide functies op de grafische rekenmachine in beeld te krijgen moet je de instellingen aanpassen. Bereken algebraïsch eerst de nulpunten van beide functies.

b Nu weet je welke waarden voor x je het beste kunt instellen. Bereken de extremen van beide functies. Geef je antwoorden zo nodig in twee decimalen nauwkeurig.

c Je kunt nu de grafieken mooi in beeld krijgen. Los op: $f(x) \geq g(x)$

Opgave 9

Een fabrikant verkoopt zelfrijzend bakmeel voor € 2,25 per kilogram. Voor de kosten TK voor productie en opslag geldt:

q (honderd kg)	1	2	3	4	5	6
TK (euro)	75	100	125	200	400	800

Tabel 1

a Hoeveel stijgen de kosten gemiddeld per kilogram als de productie toeneemt van 400 naar 500 kg?

b Voor de kosten heeft de fabrikant de formule $TK = 10q^3 - 60q^2 + 130q$ laten opstellen.
Ga na dat deze formule past bij de gegevens in de tabel.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van q.

d Bepaal met behulp van differentiëren de maximale winst.

Opgave 10

De winst W van een bedrijf wordt gegeven door de formule: $W = -0{,}25q^3 + 9q^2 - 33q - 50$.
Hierbij is q de productie in duizenden en W de winst in honderden euro.

Bepaal met behulp van differentiëren bij welke productie de winst maximaal is.
Geef ook de maximale winst.

Opgave 11

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfsleider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verkopen. Er zijn twee mogelijkheden:

- de kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op;
- de kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan gewicht, maar wint aan smaak, waardoor de prijs met € 0,25 per procent gewichtsvermindering toeneemt.

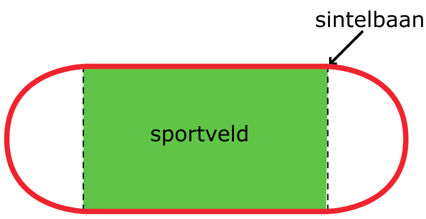
a Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.

b Noem het indrogingspercentage p. Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p.

c Bereken met behulp van differentiëren het gunstigste indrogingspercentage.

Toepassen

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. Het sportveld is net zo lang als de rechte stukken. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.



Figuur 10

Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van dit sportveld als functie van de lengte of de breedte ervan of als functie van de straal van de cirkel. Als je dat doet kun je **differentiëren toepassen om extremen te bepalen**.

Opgave 12

Bekijk het probleem van de afmetingen bepalen van het zo groot mogelijke rechthoekige sportveld binnen een atletiekbaan.

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de oppervlakte van het sportveld A, de lengte ervan l en de straal van de cirkel r. Welke formules kun je nu opstellen?

c Stel een formule op voor $A(r)$.

d Voor welke waarde van r is $A(r)$ maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Geef ook de afmetingen van het sportveld. Rond je antwoorden af op één decimaal.

Opgave 13

Een fabrikant verpakt zijn hagelslag al jaren in doosjes met een vierkante bodem van 8 bij 8 cm. Ze hebben de vorm van een balk met een hoogte van 21 cm.
De fabrikant vraag zich af of hij de inhoud van het doosje kan vergroten door de afmetingen anders te kiezen, zonder meer karton te gebruiken. Het gaat erom de inhoud zo groot mogelijk te maken bij een gelijkblijvende oppervlakte. Het grondvlak blijft vierkant. Welke afmetingen moet de fabrikant kiezen?

a Probeer eerst zelf het probleem op te lossen.

Je hebt nog geen eigen oplossing gevonden waarin je differentiëren toepast.

b Noem de zijde (in cm) van het grondvlak x en de hoogte h.

Welke twee formules kun je opstellen?

c Hoeveel karton heeft de fabrikant nodig voor zijn huidige doosjes?

Verwerk het antwoord in de oppervlakteformule en isoleer h uit de verkregen vergelijking.

d Stel een formule op voor de inhoud van de doosjes als functie van de zijde x.

e Voor welke waarde van x is de inhoud maximaal? Maak gebruik van differentiëren.
Rond je antwoord op drie decimalen.

f Bepaal de afmetingen van de doosjes met een maximale inhoud in millimeter nauwkeurig.

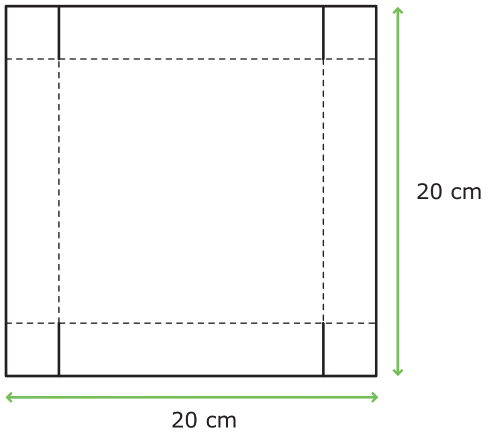
Opgave 14

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Stel dat je de zijde van het ingeknipte vierkantje x noemt. Welke functie $I(x)$ kun je dan opstellen voor de inhoud van dit bakje?

b Welke waarden kan x allemaal aannemen?

c Bereken de maximale inhoud van het bakje.



Figuur 11

Testen

Opgave 15

Bereken bij deze functies de extremen met behulp van een tekenoverzicht van de afgeleide.

a $f(x) = -x^4 + 2x^3$

b $y = x^2(x-6)$

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = 4x^5 - 80000x^2 + 2557$.

a Bepaal de extreme waarden van deze functie met behulp van de grafische rekenmachine.

b Bereken de extremen met behulp van differentiëren.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 0$?