2.2 Differentiëren

Inleiding

Je hebt gezien dat bij een functie vaak een afgeleide (functie) is op te stellen. Die afgeleide zegt iets over de veranderingen van de grafiek van de functie. En dus over de helling van die functie.
Het differentiëren is een handige techniek om afgeleiden te vinden.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de afgeleide van een functie bepalen met behulp van differentieerregels;
- de hellingwaarde bepalen met de afgeleide;
- bepalen waar de grafiek een bepaalde hellingwaarde heeft.

Voorkennis

- met behulp van een differentiequotiënt de afgeleide (of hellingsfunctie) van een functie bepalen;
- een hellingsfunctie gebruiken om de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek op te stellen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

In de applet zie je (rood) de grafiek van functies f van de vorm $f(x) = a \cdot x^p + b$.
In blauw zie je de grafiek van de bijbehorende hellingsfunctie, de afgeleide.

Stel je in $a = 1$, $b = 0$ en $p = 2$ dan heb je de grafiek van $f(x) = x^2$.

a Ga na, dat dan de gevonden hellingsgrafiek overeen komt met de grafiek van $y = 2x$.
Controleer dat je deze afgeleide ook krijgt door het differentiaalquotiënt op $[x,x+h]$ te berekenen.

b Bekijk ook andere kwadratische functies van de vorm $f(x) = ax^2 + b$. Probeer vooraf te bedenken welk voorschrift bij de hellingsfunctie zou moeten passen. En controleer dan of je gelijk hebt.
Doe hetzelfde voor derdegraadsfuncties van de vorm $f(x) = ax^3 + b$.
En voor functies van de vorm $f(x) = ax^4 + b$ en $f(x) = ax^5 + b$.
Werk bijvoorbeeld in tweetallen en bedenk een manier om de afgeleide te vinden zonder met differentiequotiënten te werken.

Uitleg

Gegeven is de functie $f(x) = a \cdot x^2$. Op het interval $[x,x+h]$ kan het differentiequotiënt bepaald worden.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \frac{2axh + ah^2}{h} = 2ax + ah$$

Als h naar 0 nadert, blijft er alleen $2ax$ over. Dit is de afgeleide van f, dus $f'(x) = 2ax$.

De afgeleide van $f(x) = ax^2$ is $f'(x) = 2ax$.
Net zo: de afgeleide van $g(x) = ax^3$ is $g'(x) = 3ax^2$.

In het algemeen is van $f(x) = ax^n$ de afgeleide $f'(x) = nax^{n-1}$ voor elke waarde van a.
Deze regel kun je gebruiken om een afgeleide te bepalen, dat heet differentiëren. Deze specifieke regel heet de machtsregel.

Als je functies bij elkaar optelt, bepaal je de afgeleide door de afgeleiden apart te bepalen en ze dan weer bij elkaar op te tellen. Dit heet de somregel.
Gegeven is bijvoorbeeld de functie: $f(x) = x^3 + 5x^2 - 25x + 10$.
Deze functie kun je (in gedachten) opdelen in vier opgetelde functies:
$f_1(x) = 1x^3$, $f_2(x) = 5x^2$, $f_3(x) = -25x^1$ en $f_4(x) = 10x^0$.
Bepaal de afgeleide van deze afzonderlijke functies en tel ze bij elkaar op:
$f'(x) = 3 \cdot 1x^{3-1} + 2 \cdot 5x^{2-1} + 1 \cdot -25x^{1-1} + 0 \cdot 10^{0-1} = 3x^2 + 6x - 25$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met behulp van differentiëren de afgeleide van een functie kunt bepalen.
Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

a $f(x) = 12x^5$

b $g(x) = 12x^5 + 20$

c $h(x) = 12x^5 + 20x^3 + 17$

d $k(x) = 12x^5 + 20x^3 + 5x^2 - 10x + 15$

Opgave 2

Een lineaire functie heeft de vorm $f(x) = ax + b$.

a Laat met behulp van een differentiequotiënt zien dat dan $f'(x) = a$.

b Laat zien, dat dit ook uit de machtsregel voor differentiëren volgt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De afgeleide van een functie $y = f(x)$ kun je bepalen door h naar 0 te laten naderen in het differentiequotiënt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Voor veel soorten functies zijn hieruit algemene regels af te leiden waarmee je de afgeleide op een eenvoudiger manier kunt vinden. Dergelijke regels heten **differentieerregels** en het toepassen ervan noem je **differentiëren**.

- **Machtsregel**
  De afgeleide van de machtsfunctie $f(x) = cx^n$ is $f'(x) = ncx^{n-1}$ voor elke waarde van c en voor gehele positieve waarden van n.
- **Constanteregel**
  De afgeleide van een constante (functie) is 0: als $f(x) = c$, dan is $f'(x) = 0$.
- **Somregel**
  De afgeleide van de som van twee functies is de som van de afgeleiden van die functies: als $f(x) = u(x) + v(x)$ dan is $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Deze regel geldt ook bij een verschil van twee functies.

Voorbeeld 1

Bepaal de afgeleide van de functie $f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x - 100$.

Antwoord

Schrijf eerst de functie als een som (verschil) van machtsfuncties en constante functies:

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x^1 - 100$

Pas nu de differentieerregels toe. De afgeleide is dan:

$f'(x) = 3x^{3-1} + 4 \cdot 2x^{2-1} - 12 \cdot 1x^{1-1} - 0 = 3x^2 + 8x - 12$

Opgave 3

Bepaal de afgeleide van de volgende functies door te differentiëren met behulp van de differentieer-regels.

a $f(x) = 8x^3 - 50x + 70$

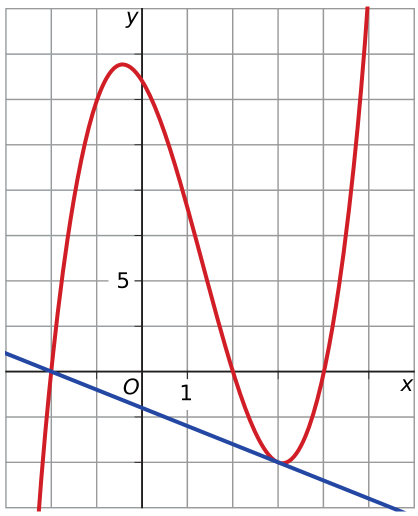
b $f(x) = 10 + 3x - 9x^2 - 12x^4$

c $f(x) = \frac{1}{3}x^6 - 5x^2$

d $f(x) = 100 - 25x - x^4$

Voorbeeld 2

Stel door middel van differentiëren de vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van de functie $g(x) = (x^2 - 4)(x - 4)$ voor $x = 3$.



Figuur 2

Antwoord

Voor de vergelijking van de raaklijn heb je het hellingsgetal $g'(3)$ nodig.
Deze functie is geschreven als het product van twee functies en niet als som. Schrijf het functievoorschrift eerst als een som (verschil) van machtsfuncties en constante functies. Haakjes wegwerken geeft:
$g(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

De afgeleide is:
$g'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 4x^1 - 1 \cdot 4x^0 + 0 = 3x^2 - 8x - 4$

De vergelijking van de raaklijn heeft de vorm $y = ax + b$.

$g'(3) = -1$, dus de vergelijking is $y = -x + b$.

Omdat $g(3) = -5$ gaat de raaklijn door het punt $(3, -5)$.
Dat vul je in de vergelijking in: $-5 = -3 + b$ geeft $b = -2$.

De vergelijking van de raaklijn is: $y = -x - 2$.

Opgave 4

Gegeven is de functie $y = (x^2 - 4)(x - 6)$.

a Een functievoorschrift in deze vorm is handig als je de nulpunten van de functie wilt bepalen. Bereken die nulpunten.

b Als je met hellingsgetallen van deze functie wilt werken moet je eerst de haakjes wegwerken. Bepaal de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ van deze functie.

Met behulp van deze afgeleide kun je de vergelijking van een raaklijn aan de grafiek opstellen. In het voorbeeld kun je nog eens zien hoe dat gaat.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van deze functie voor $x = 2$. Plot beide vervolgens ter controle op de grafische rekenmachine.

Voorbeeld 3

De kosten K (euro) bij de productie van q eenheden van een bepaald product bedragen:
$K(q) = 0{,}5q^3 - 4{,}5q^2 + 40q + 80$
Er zijn twee waarden van q waarin de kosten stijgen met een snelheid van € 40,00 per eenheid. Welke twee waarden van q zijn dat?

Antwoord

De snelheid waarmee de functiewaarden stijgen afhankelijk van q is $K'(q)$.
Nu is: $K'(q) = 1{,}5q^2 - 9q + 40$.
Er geldt $K'(q) = 40$ als:

$$\begin{aligned} 1{,}5q^2 - 9q + 40 &= 40 \\ 1{,}5q^2 - 9q &= 0 \\ 1{,}5q(q-6) &= 0 \\ q &= 0 \vee q = 6 \end{aligned}$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn $q = 0$ en $q = 6$. Dus bij een productie van nul en zes eenheden stijgen de kosten met een snelheid van € 40,00 per eenheid.

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je differentiëren kunt toepassen in de economie. Neem voor de kostenfunctie $K(q) = 0{,}1q^3 - q^2 + 4q$ met K in euro.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Bereken de snelheid waarmee de kosten stijgen voor $q = 0$.

c Voor welke waarde van q stijgen de kosten met een snelheid van € 4,00 per eenheid?

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 10x - 35$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Bereken het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$. Controleer je antwoord met de dy/dx-functie op de grafische rekenmachine.

c Er zijn punten op de grafiek van f waarin de helling de waarde 10 heeft. Bereken de coördinaten van die punten. Controleer daarna of je de juiste punten hebt gevonden met de dy/dx-functie op de grafische rekenmachine.

Verwerken

Opgave 7

Bepaal telkens de afgeleide van de gegeven functie. Bepaal ook het hellingsgetal van de grafiek voor $x = 1$ en controleer zo mogelijk je antwoord op de grafische rekenmachine.

a $f(x) = x^3 - 4x$

b $g(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 35$

c $s(t) = 60t - 4{,}9t^2$

d $H(t) = 2(t^2 - 4)$

e $V(x) = 5 - (x-3)^2$

f $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

g $TW(q) = 0{,}5q^3 - 6q^2 - 25q + 112$

h $K(x) = \left(3x^2 - 2a\right)(ax - 1)$

Opgave 8

Bepaal van elk van de volgende functies de afgeleide. Bereken vervolgens de punten van de grafiek waar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn de waarde 0 heeft. Rond je antwoord indien nodig af op één decimaal. Controleer je antwoorden op de grafische rekenmachine.

a $f(x) = x^4 - 8x^2$

b $TW(q) = -q^3 + 3q^2 + 3q + 6$

c $v(t) = t(t-1)^2$

d $TW(p) = 40p - 0{,}02p^2$

Opgave 9

y is een functie van x waarvoor geldt: $y = x^3 - 25{,}5x^2 + 180x + 120$.

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Deze afgeleide heeft twee nulwaarden. Welke betekenis hebben die nulwaarden voor de functie?

c Bereken de nulwaarden van de afgeleide y'.

d Voor welke waarden van x is de functie dalend?
Wat betekent dit voor $y'(x)$?

Opgave 10

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 9\right)$.

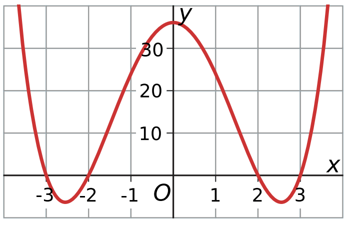
a Laat zien hoe je uit het functievoorschrift de nulpunten van de grafiek van f kunt afleiden.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken het snijpunt van de raaklijnen aan de grafiek van f voor $x = -2$ en voor $x = 2$.

d Los op: $f'(x) = 0$.

e Wat betekent het antwoord van d voor de grafiek van f?



Figuur 3

Toepassen

Opgave 11: De baan van een kogel

Een voorwerp wordt afgeschoten met een bepaalde beginsnelheid en onder een bepaalde hoek. Wanneer je de luchtweerstand verwaarloost, is zijn kogelbaan parabolisch. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de grafiek van de functie $h(x) = 1{,}5 - 0{,}01(x - 10)^2$. Hierin is h de hoogte in meter van het afgeschoten voorwerp boven de grond en x de afstand in meter over de grond tot recht onder het afgeschoten voorwerp.

a Op welke hoogte werd het voorwerp afgeschoten?

b Bereken $h'(0)$.

c Wat betekent dit getal voor de kogelbaan?

d Bereken het punt van de kogelbaan waarin $h'(x) = 0$. Welke betekenis heeft dit punt?

e In het hoogste punt van de kogelbaan is de afgeleide nul. Toch beweegt de kogel daar met een zekere snelheid. Kun je dit verklaren?

Opgave 12: Gemiddelde totale kosten

Voor de productiekosten van een bepaald artikel geldt: $TK = 1200 + 0{,}2q^2$. Hierin is q het aantal geproduceerde eenheden van dat artikel en stelt TK de totale kosten in euro voor. De productiekosten per eenheid worden gegeven door $GTK = \frac{TK}{q}$. Je noemt dit wel de gemiddelde totale kosten.

a Druk de gemiddelde totale kosten uit in q.

b Met de grafische rekenmachine kun je de grafiek van GTK bekijken. Welke verticale asymptoot heeft de grafiek van GTK? Welke economische betekenis heeft deze asymptoot?

c Je kunt bij deze functie (nog) geen afgeleide bepalen. Maar je kunt er wel een (benadering van de) hellingsgrafiek bij tekenen met de grafische rekenmachine. Teken die hellingsgrafiek en bepaal met behulp daarvan bij welke productie de gemiddelde totale kosten zo laag mogelijk zijn.

d Welke waarde benadert de helling van de grafiek van GTK als de productie heel erg groot is? En welke betekenis heeft dat voor de productiekosten per eenheid?

Testen

Opgave 13

Bepaal bij elk van deze functies de afgeleide. Soms moet je eerst het functievoorschrift nog bewerken.

a $f(x) = x^6 + 8x - 12$

b $f(x) = -1{,}5x^3 + 4x$

c $f(x) = x\left(x^2 - 2x\right)$

d $f(x) = (2x + 1)^2$

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$.

a Bereken het hellingsgetal van deze functie in het punt (0,0) met behulp van de afgeleide.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (0,0).

c Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan 0. Welke twee punten zijn dat?

d De grafiek van f heeft in een bepaald punt een grootste hellingsgetal. In welk punt is dat?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.