1.3 Differentiequotiënt

Inleiding

Je hebt veranderingen in grafieken leren beschrijven in woorden en met toenamediagrammen. Bij toenamediagrammen moet je met een vaste stapgrootte werken. Maar als je wilt nagaan of een wielrenner de eerste 10 minuten gemiddeld net zoveel heeft afgelegd als de volgende 15 minuten, heb je met ongelijke intervallen te doen. In dat geval werk je met gemiddelde veranderingen.

Je leert in dit onderwerp

- de betekenis van het begrip differentiequotiënt kennen;
- tussen twee punten uit een tabel of een grafiek het differentiequotiënt bepalen;
- het differentiequotiënt van een functie op een gegeven interval berekenen;
- werken met toepassingen van het differentiequotiënt.

Voorkennis

- werken met functievoorschriften, functiewaarden berekenen;
- toenemende, of afnemende, of constante) stijging en daling, maximum en minimum herkennen;
- werken met toenamediagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die vind je in de tabel:

tijd (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 1

Figuur 1

a Is hij de eerste 8 km gemiddeld sneller of langzamer dan in de volgende 4 km? Waaraan zie je dat?

b Waarom is er bij deze situatie eigenlijk geen toenamediagram te maken?

Je maakt bij deze tabel een grafiek door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd, op de verticale as de afgelegde afstand. Niet alle lijnstukken zijn even steil.

c Hoe kun je de helling van zo'n lijnstuk in een getal uitdrukken?

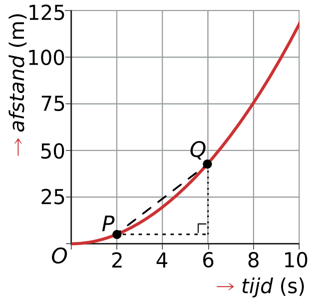
d Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de periode van 12 kilometer tot en met 18 kilometer.

e Wat betekent het getal dat je zojuist hebt gevonden voor de wielrenner?

Uitleg

Als een zeilwagen start en de windkracht constant is, dan neemt zijn snelheid toe. Veronderstel dat voor de afgelegde afstand s (in meter) geldt: $s(t) = 1{,}2 \cdot t^2$. Hierin is t de tijd in seconden. Bekijk de grafiek.
Na 2 seconden is de afgelegde afstand $s(2) = 4{,}8$ m.
Na 6 seconden is de afgelegde afstand $s(6) = 43{,}2$ m.
In die 4 seconden is er $s(6) - s(2) = 43{,}2 - 4{,}8 = 38{,}4$ m afgelegd.

De gemiddelde snelheid is: $\frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.



Figuur 2

Je berekent de gemiddelde snelheid, ofwel de gemiddelde verandering van plaats, door het verschil in afstand te delen door het verschil in tijd:

gemiddelde snelheid $= \frac{\Delta \text{ afstand}}{\Delta \text{ tijd}}$.

Het teken Δ (een Griekse letter D) staat voor differentie, wat verschil betekent. Dit getal is de helling van het lijnstuk tussen de punten die horen bij $t = 1$ seconde en bij $t = 4$ seconden.

Op het interval [2,6] verandert $s(t)$ gemiddeld met:

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(6) - s(2)}{6-2} = \frac{38{,}4}{4} = 9{,}6$ m/s.

Dit heet een differentiequotiënt ('differentie' is 'verschil' en een quotiënt is de uitkomst van een deling).
De gemiddelde verandering van s op een gegeven interval van t is het differentiequotiënt over dat interval.
Het is ook de helling van het lijnstuk PQ.

Opgave 1

Voor de afgelegde afstand s (in meter) van de zeilwagen in de geldt dat $s = 1{,}2t^2$. Hierin is t de tijd in seconden.

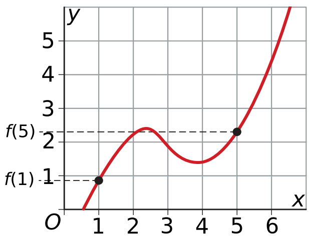
a Bereken de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval [0,6].

b Bereken ook de gemiddelde snelheid op het interval [6,10].

c Op welk van beide intervallen was de gemiddelde snelheid van de zeilwagen het hoogst?

Opgave 2

In het algemeen heb je te maken met een functie als $y = f(x)$.
Hier zie je een grafiek van een functie f.
Bekijk het interval [1,5].



Figuur 3

a Bereken de gemiddelde verandering van f op dit interval.
Lees functiewaarden af uit de grafiek.

b Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval [2,4].

c Bereken de helling van het lijnstuk dat hoort bij de punten $(1, f(1))$ en $(6, f(6))$.

d Geef een interval waarop de gemiddelde verandering 2 m/s is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

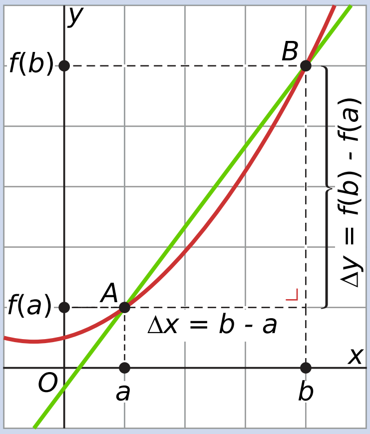
Bekijk de grafiek van de functie $y = f(x)$.

De **gemiddelde verandering** van de functie f op het interval $[a,b]$ is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

De uitkomst hiervan noem je het **differentiequotiënt** van de functie f op het interval $[a,b]$. In de grafiek van f is dit differentiequotiënt gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door $A(a,f(a))$ en $B(b,f(b))$.
Onthoud dat het differentiequotiënt gelijk is aan

- de helling van de lijn AB;
- de richtingscoëfficiënt van de lijn AB;
- de gemiddelde verandering van de grafiek op het interval $[a,b]$.

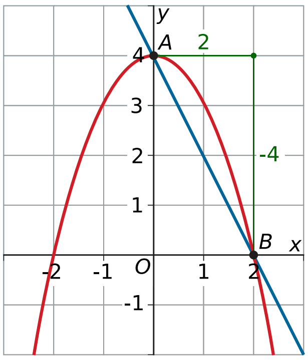


Figuur 4

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 4 - x^2$.

Bereken het differentiequotiënt op het interval [0,2] en beschrijf de betekenis van dit getal.



Figuur 5

Antwoord

Het differentiequotiënt op het interval [0,2] is:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0-4}{2} = -2$.

Je ziet dat het differentiequotiënt gelijk is aan het hellingsgetal van het lijnstuk AB. Het is de gemiddelde verandering van de functiewaarden op het interval [0,2]. Het geeft dus de toename of de afname van $f(x)$ per eenheid van x weer.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval [-2,1].

b Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op het interval [-1,1].

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval [2,5].

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval [-3,6].

c Geef een interval waarop de gemiddelde verandering van f gelijk is aan 0.

Voorbeeld 2

Ilse is om 14:00 uur begonnen met het verkopen van kaartjes voor een voorstelling. Zij heeft op een aantal tijdstippen bijgehouden hoeveel kaartjes ze verkocht heeft:

tijd	10:00	12:00	13:30	15:00	18:00
aantal kaartjes	0	178	331	405	642

Tabel 2

Om 12:00 uur had Ilse 178 kaartjes verkocht en om 13:30 uur 331. Wanneer liep de kaartverkoop het best, tussen 10:00 en 12:00 uur of tussen 12:00 en 13:30 uur?

Antwoord

Tussen 10:00 en 12:00 uur is de gemiddelde verkoop per uur $\frac{178-0}{2} = 89$.

Tussen 12:00 en 13:30 uur is de gemiddelde verkoop per uur $\frac{331-178}{1,5} = 102$.

Hoewel er tussen 10:00 en 12:00 uur meer kaarten zijn verkocht, liep tussen 12:00 en 13:30 uur de kaartverkoop gemiddeld het best. Met behulp van het berekenen van differentiequotiënten kun je de kaartverkoop eerlijk vergelijken op de verschillende tijdsintervallen.

Opgave 5

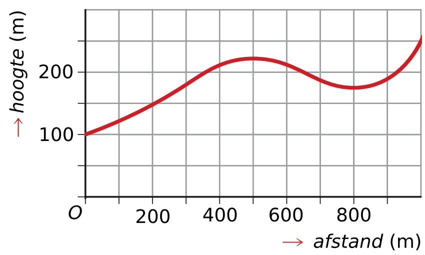
Bekijk **Voorbeeld 2**.

a In welk van de tijdsintervallen liep de kaartverkoop het best?

b Emmy koopt om 12:10 uur het 181e kaartje. Hoeveel bedraagt de gemiddelde verkoop per minuut tussen 12:10 en 13:30 uur?

Opgave 6

Bij het begin van een weg naar een top van 250 m hoogte staat een waarschuwingsbord met daarop een helling van 15%. Deze grafiek geeft het hoogteverloop van die weg weer. Horizontaal is de afstand uitgezet die je hemelsbreed hebt afgelegd en verticaal de hoogte waarop je je dan bevindt.



Figuur 6

a Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering bij zo'n hellingspercentage?

b Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering gerekend over de gehele weg?

c Klopt het waarschuwingsbord?

d Hoeveel bedraagt de gemiddelde hoogteverandering op het interval [400,500] ongeveer?

e Schat de steilste helling van deze weg.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 + 5$. Toon aan dat het differentiequotiënt van f op het interval $[0,a]$ gelijk is aan $2a$.

Antwoord

Het differentiequotiënt van f op het interval $[0,a]$ is:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2a^2+5-5}{a-0} = \frac{2a^2}{a} = 2a.$$

Als je nu een interval zoekt waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 4, kun je $a = 2$ nemen en vind je als interval $[0,2]$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je de functie $f(x) = 2x^2 + 5$.

a Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 6.

b Bereken het differentiequotiënt op het interval [1,4].

c Noem een interval waarop het differentiequotiënt gelijk is aan die op het interval [1,4].

Opgave 8

a Elke constante functie heeft de vorm $f(x) = c$. Toon aan dat de gemiddelde verandering van zo'n functie op elk interval gelijk is aan 0.

b Een lineaire functie is van de vorm $f(x) = ax + b$. Waarom is het differentiequotiënt van zo'n functie op elk interval gelijk aan a?

Verwerken

Opgave 9

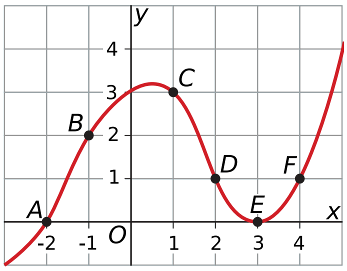
Je ziet een aantal punten op de grafiek.

a Bereken de gemiddelde helling van het lijnstuk AB.

b Bereken de gemiddelde helling van het lijnstuk CF.

c Voor twee lijnstukken die horen bij twee van de getekende punten hoort een differentiequotiënt van 0. Welke twee lijnstukken zijn dat?

d Punt F heeft een kleinere y-waarde dan punt C. Hoe kun je dat aan het differentiequotiënt op het interval [1,4] zien?



Figuur 7

Opgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$.

a Bereken het differentiequotiënt op het interval [0,2].

b Bereken het differentiequotiënt op het interval [-1,2].

c Wat valt je bij b op? Kun je dat verklaren?

Opgave 11

Tijdens een hardloopwedstrijd van 10 kilometer wordt op drie momenten de (tussen)tijd gemeten. De resultaten van Bram zie je in de tabel.

tijd (minuten)	0	12	27	39
afstand (kilometer)	0	3	7	10

Tabel 3

a Op welk tijdsinterval liep Bram gemiddeld het snelst?

b Cedric loopt de eerste 1,5 kilometer in 6 minuten. Stel dat hij de hele wedstrijd met hetzelfde tempo loopt. Finisht hij dan voor of na Bram?

Opgave 12

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$. Toon aan dat het differentiequotiënt op elk interval $[a, a+1]$ gelijk is aan $6 \cdot a + 3$.

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2,5x^2 + 3x$.

a Bereken het differentiequotiënt van f op het interval [0,2] exact.

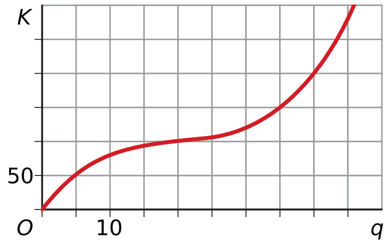
b Geef nog een interval met eenzelfde differentiequotiënt als bij a.

Toepassen

Opgave 14: Koekjesproductie

Het bedrijf Fiesta produceert koekjes voor de horeca. Als verpakking gebruiken ze zakken van 3 kilogram. De kosten hangen af van het aantal zakken koekjes dat gemaakt wordt, q is het aantal geproduceerde zakken koekjes per uur.
Voor de kosten K (in euro) wordt het volgende functievoorschrift gebruikt:

$K(q) = 0,01q^3 - 0,6q^2 + 13q$



Figuur 8

a Bereken de totale kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.

b Bereken de gemiddelde kostenstijging bij een productietoename van 0 zakken per uur naar 20 zakken per uur.

c Plot zelf de grafiek op de grafische rekenmachine. Plot ook de lijn door de punten (0,0) en (20,100). De lijn snijdt de grafiek van K in een derde punt. Geef de coördinaten van dat punt.

d Kun je nu zonder berekening zeggen wat de gemiddelde kostenstijging is op het interval [20,40]? Licht je antwoord toe.

Opgave 15: Afkoelende koffie

Het afkoelen van een kopje koffie hangt af van de temperatuur van de koffie bij het inschenken en van de kamertemperatuur. Ook de vorm en het materiaal waarvan het kopje is gemaakt, heeft invloed. De formule $T(t) = 20 + 70 \cdot 0,82^t$ geeft de temperatuur van de koffie.

a Hoe hoog is de temperatuur van de koffie bij het inschenken?

b Hoeveel graden daalt de temperatuur van de koffie gemiddeld in de eerste vijf minuten?

c Bereken ook in één decimaal nauwkeurig hoeveel de temperatuur gemiddeld daalt in de volgende vijf minuten.

d De temperatuur van de koffie daalt van $t = 0$ tot $t = 5$ sneller dan van $t = 5$ tot $t = 10$. Leg uit hoe je dit aan de differentiequotiënten bij b en c kunt zien. Geef ook een natuurkundige verklaring.

Testen

Opgave 16

Bij een wielrenner in een tijdrit worden op bepaalde plaatsen tussentijden genoteerd. Die tijden vind je in de tabel:

tijd t (min)	0	10	18	34	44	60	78	94
afstand a (km)	0	8	12	18	23	29	37	45

Tabel 4

a Bereken het differentiequotiënt op het tijdsinterval [0,10].

b Welke betekenis heeft dit getal voor de wielrenner?

c Je kunt bij deze tabel een grafiek maken door de punten met lijnstukken te verbinden. Op de horizontale as komt de tijd t in minuten, op de verticale as de afgelegde afstand a in kilometer. Bereken het hellingsgetal van het lijnstuk dat hoort bij het interval [44,60].

d Bereken voor het tijdsinterval [18,44] de waarde $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ in twee decimalen nauwkeurig.

e Welke betekenis hebben de bij c en d gevonden getallen voor de grafiek? Geef alle goede antwoorden.

A. Ze geven de helling weer van het lijnstuk door bij het begin- en het eindpunt bij het tijdsinterval.
B. Ze geven de totale toename van de afstand weer op het tijdsinterval.
C. Ze geven de gemiddelde toename van de afstand per minuut weer op het tijdsinterval.

Opgave 17

Gegeven de functie $f(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 4$.

a Bereken de gemiddelde verandering van f op het interval [0,2].

b Bereken het differentiequotiënt van f op het interval [-3,7].

c Geef een interval waarop het differentiequotiënt van f gelijk is aan 0.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.