6.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Periodieke functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- periodiek verschijnsel — periode — golflengte — frequentie;
- eenheidscirkel — draaihoek — radialen — standaardsinus;
- arcsinus;
- sinusoïde — periode — amplitude — evenwichtslijn — horizontale verschuiving.
- periodiek model

Activiteitenlijst

- bij een periodiek verschijnsel de periode, de golflengte en de frequentie bepalen;
- draaihoeken omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd — de standaard sinusgrafiek tekenen;
- vergelijkingen met de standaardsinus oplossen, exact (met arcsin) en met de GR;
- bij een sinusoïde de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving bepalen, zowel vanuit de grafiek als vanuit de formule — toppen en nulpunten van sinusoïden berekenen — vergelijkingen bij sinusoïden oplossen;
- bij een gegeven periodiek verschijnsel een sinusoïde opstellen die dat verschijnsel zo goed mogelijk beschrijft.

Achtergronden

Bekijk de applet: sinus

In de Indische wiskunde heette de helft van de koorde van een cirkelboog de ardhâ-jyâ (ardha = half; jyâ = koorde) van die boog. Dit werd, afgekort tot jyâ of jîv en door de Arabieren als vgîb geschreven. Toen het wetenschappelijk centrum van de wereld verschoof, werden de Arabische werken in de 12e eeuw vertaald naar het Latijn. Bij de vertaling werd vgîb gelezen als het Arabische vgaib wat 'plooi' of 'boezem' betekent. Dit werd door Gerard van Cremona (1114—1187) letterlijk vertaald als **sinus**.

Sinus en cosinus werden al in de Griekse Oudheid bestudeerd en later o.a. door de Indische geleerden **Aryabhata (476–550)**, **Brahmagupta** en **Bhaskara** en de Perzische wetenschappers **Mohammad ibn Musa al-Khwarizmi**, **Omar Khayyam**, **Nasir al-Din al-Tusi (13e eeuw)**, **Ghiyath al-Kashi (14e/15e eeuw)**. In de 12de eeuw werden deze begrippen in West-Europa bekend.
In de oorspronkelijke definitie waren sinus en cosinus verhoudingen van bepaalde zijden in een rechthoekige driehoek. De grootte van deze verhouding verandert niet zo lang de hoeken even groot blijven.
Maar deze definitie brengt het probleem met zich mee dat stompe hoeken geen sinus of cosinus hebben (want er bestaan geen rechthoekige driehoeken met een stompe hoek). Om dit probleem op te lossen werden de sinus en cosinus opnieuw gedefinieerd met behulp van de eenheidscirkel. Voordeel van deze definitie is dat de sinus en de cosinus van elke hoek kunnen worden bepaald.

Testen

Opgave 1

Reken de hoeken in graden om naar radialen tussen 0 en 2π en omgekeerd.
Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $120°$

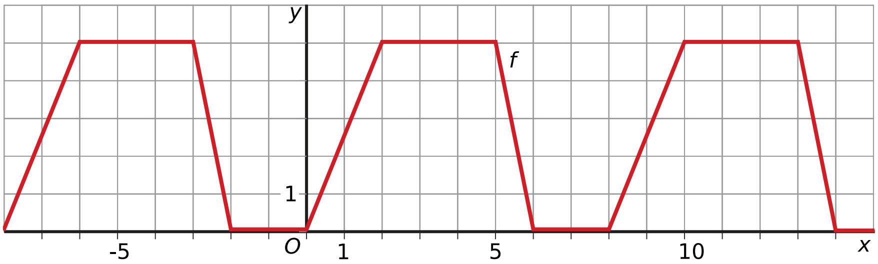
b $700°$

c $\frac{5}{6}\pi$ rad

d $\frac{5}{6}$ rad

Opgave 2

Bekijk de periodieke grafiek f. De grafiek loopt links en rechts oneindig ver door.



Figuur 1

a Hoe groot is de periode van f?

b Bereken $f(36)$ en $f(2449)$.

c Bereken $f(-250{,}5)$.

d Voor welke waarde van x is $f(x) = 3{,}75$?

e Los op: $f(x) = 0$ met $90 \leq x \leq 100$.

Opgave 3

Gegeven is de sinusoïde $y = 50\sin\left(\frac{1}{4}\pi(x-1)\right) + 200$ met $0 \leq x \leq 30$.

a Geef de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van deze sinusoïde.

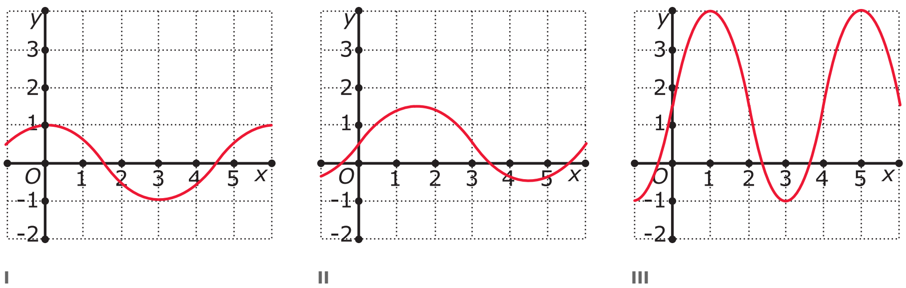
b Plot de grafiek. Welke vensterinstellingen kies je?

c Hoeveel periodes krijg je in beeld?

d Los in drie decimalen nauwkeurig op: $y \leq 180$.

Opgave 4

Bekijk de drie figuren met sinusoïden. Geef telkens een bijpassend functievoorschrift.



Figuur 2

Opgave 5

Bij het bepalen van de gewenste dijkhoogte langs de Nederlandse kust is het belangrijk dat de dijk hoger is dan de te verwachten maximale waterhoogte bij een stormvloed. De gemiddelde waterhoogte is daarbij niet van belang. Bij normale omstandigheden kan de getijdenbeweging van het zeewater bij de Hondsbosse zeewering bij Petten redelijk worden beschreven door de functie:

$$y = 0{,}4 + 1{,}5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot t\right)$$

Hierbij is t in uur ten opzichte van middernacht op 21 juni 1998 en de waterhoogte y in meter ten opzichte van het NAP.
Onder invloed van de stand van de zon en de maan kan de amplitude van de getijdenbeweging variëren van 10% tot 140% van de amplitude van de gegeven functie. Afhankelijk van de windsterkte, kan de gemiddelde waterhoogte bij aanlandige wind 1,5 tot 2,5 meter hoger zijn dan normaal.

Hoe hoog moet de zeedijk van Petten volgens jou minimaal zijn? Licht je antwoord toe aan de hand van het gegeven functievoorschrift.

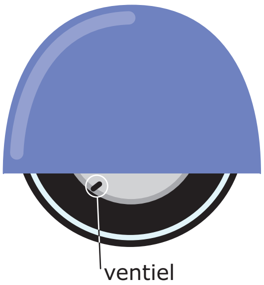
Opgave 6

Van het autowiel in de figuur is slechts het onderste deel zichtbaar. Van de wielhoogte is $\frac{3}{4}$ deel afgeschermd achter het spatbord.

a Hoeveel procent van de tijd is het ventiel zichtbaar als de auto met een constante snelheid rijdt?

'Zichtbaar' kun je aangeven met een 1, 'onzichtbaar' met een 0. Je kunt dan de grafiek van de zichtbaarheid van het ventiel uitzetten tegen de tijd.

b Is dit een periodieke functie? Zo ja, teken een periode op schaal.



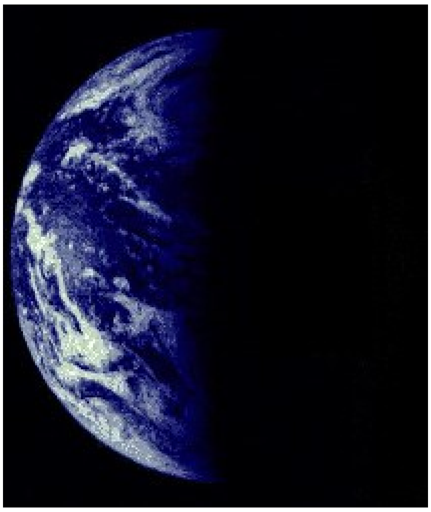
Figuur 3

Toepassen

Opgave 7: Daglengte

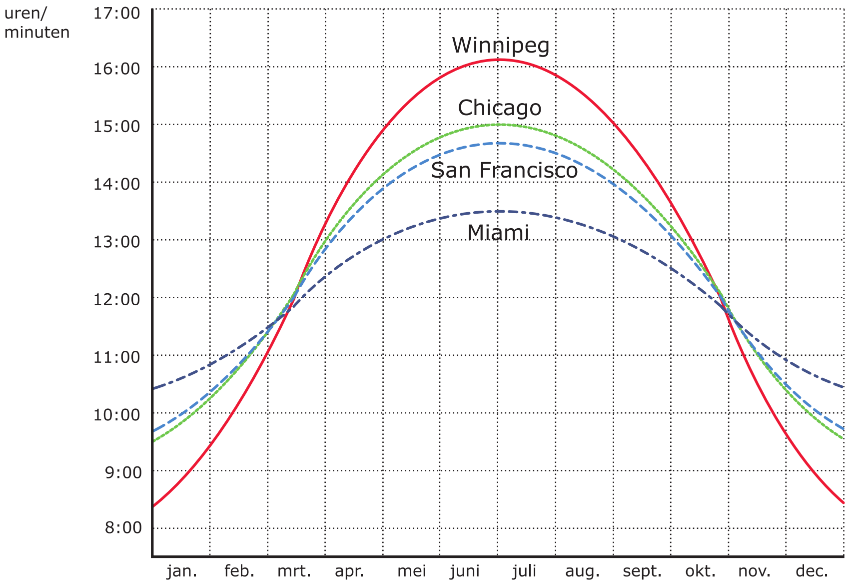
De daglengte varieert door het jaar heen. De daglengte is het verschil in tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang. Dit is een heel mooi periodiek verschijnsel dat behoorlijk nauwkeurig is te beschrijven met behulp van een sinusoïde.

Via internet kun je een **tabel voor zonsopkomst en - ondergang in De Bilt** vinden.
Een dergelijke tabel kun je in een rekenblad invoeren en dan grafieken maken voor de tijdstippen van zonsopkomst en zonsondergang. **Hier zie je er een voorbeeld van**. Het zijn de vereenvoudigde gegevens van een bepaald jaar voor Amsterdam. De daglengte is het verschil van beide en ook daarvan is eenvoudig een grafiek te maken.
Je kunt de grafieken benaderen met sinusoïden en zo nauwkeurig de langste dag en de kortste dag berekenen...



Figuur 4

Het variëren van de daglengte hangt nogal af van de breedtegraad op aarde. Dat komt omdat de aardas niet precies loodrecht op de ecliptica (het vlak waarin de aardbaan om de zon ligt). Ook leuk om nader te onderzoeken...



Figuur 5

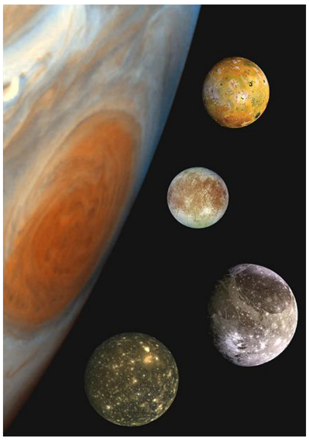
a Stel voor de vier steden een voorschrift op voor de daglengte als functie van de tijd t in dagen; $t = 0$ op 1 januari.

b Op welke datum is de langste dag van het jaar? En de kortste?

c Hoeveel dagen per jaar is de daglengte meer dan 14 uur?

Opgave 8: De manen van Jupiter

In 1610 werden de vier helderste **Jupitermanen** ontdekt door Galileï. De manen beschrijven bij benadering cirkelvormige banen om Jupiter, alle vier in dezelfde omlooprichting. Deze banen liggen (vrijwel) in één vlak met Jupiter en de Aarde. Daarom zie je Jupiter en de vier manen in een kijker altijd op één horizontale lijn liggen. De onderlinge posities van de manen in het kijkerbeeld veranderen voortdurend. Voor amateurastronomen worden maandelijks grafieken gepubliceerd waaruit ze op ieder moment de posities van de manen kunnen aflezen. Zie **hemel.waarnemen.com: Galileïsche manen van Jupiter, slingerdiagram september 2008** Het diagram op de website geeft informatie over de maand september in 2008.
Deze slingerdiagrammen zijn vrijwel zuivere sinusoïden.

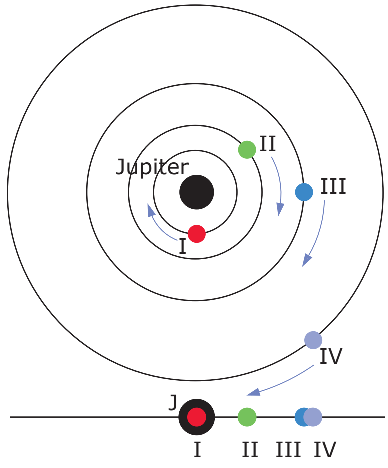


Figuur 6

Voor Ganymedes bijvoorbeeld wordt deze harmonische beweging goed beschreven door $u(t) = 15 \sin\left(\frac{2\pi}{29{,}5}(t - 17)\right)$ waarin t de tijd in dagen is met $t = 1$ op 1 september 2008 om 0:00 uur en u de uitwijking t.o.v. Jupiter gemeten in Jupiterstralen.

Zo kun je ook van de beweging van de drie andere Galileïsche manen een formule opstellen.
En verder kun je op elk moment tekenen hoe je deze manen t.o.v. Jupiter vanaf Aarde ziet. Nog een leuke puzzel...

Op 1 september 2008 om 0:00 uur waren dus van links (west) naar rechts (oost) in de kijker te zien: Io (I, voor Jupiter), Europa (II), Ganymedes (III) en Callisto (IV). Hier zie je van de vier manen de posities op hun cirkelbanen op 1 januari 1990 om 0:00 uur getekend.



Figuur 7

a Teken in de figuur voor deze vier manen het deel van de baan dat ze doorlopen van 1 september 0:00 uur tot 5 september 0:00 uur.

In de kijker zie je de beweging van elk van die manen als een in de tijd veranderende uitwijking $u(t)$ t.o.v. Jupiter op een horizontale as. Die uitwijking kan goed worden beschreven met een sinusoïde. u wordt uitgedrukt in veelvouden van de straal van Jupiter en t is in dagen.
Voor Callisto geldt bij goede benadering $u(t) = 26 \sin(0{,}365(t-24))$.
(Hierbij is er van uit gegaan dat ‘West’ een positieve waarde van u betekent en ‘Oost’ een negatieve.)

b Laat zien dat deze formule redelijk overeenkomt met de gegeven grafiek. Bereken met de formule de omlooptijd van Callisto.

c Stel zelf zo'n formule op voor Ganymedes.

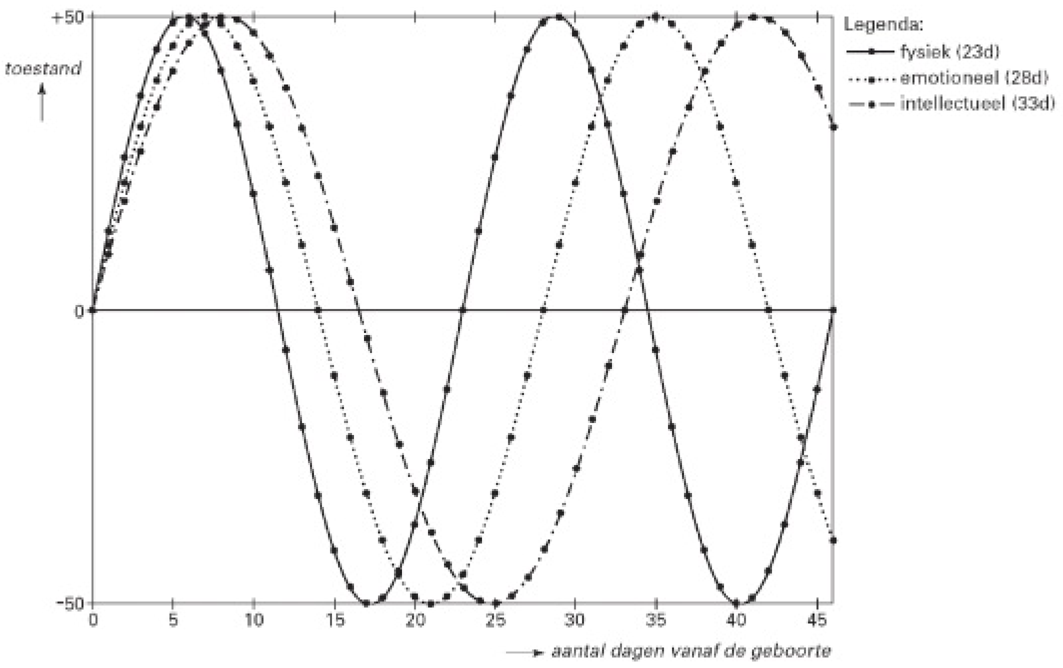
De manen zijn in de figuur naar verhouding veel te groot getekend. In werkelijkheid zijn het stipjes. Dus als $-1 \leq u(t) \leq 1$ dan kunnen de manen achter Jupiter zitten.

d Bereken met behulp van de formule voor Ganymedes hoe lang deze maan achter Jupiter zit.

Examen

Opgave 9: Bioritme

Op een pagina op Internet staat te lezen dat ons leven beheerst wordt door een drietal toestanden, namelijk door onze fysieke, onze emotionele en onze intellectuele toestand. Op de ene dag voel je je fysiek (lichamelijk) beter dan op een andere dag. Deze ‘fysieke toestand’ kunnen we weergeven op een schaal van -50 (fysiek op dieptepunt) tot +50 (fysiek opperbest). Deze fysieke toestand varieert in de tijd volgens een sinusoïde.
Ook de ‘emotionele toestand’ en de ‘intellectuele toestand’ variëren op een schaal van -50 tot +50 volgens een sinusoïde. Zie figuur.



Figuur 8

Bij de geboorte van een mens zou elke cyclus zich in dezelfde begintoestand bevinden, zoals is weergegeven in de figuur. Tezamen bepalen de drie cycli het zogenaamde bioritme van een mens. Sommigen beweren dat het bioritme volledig vastlegt tot welke prestaties een mens op een bepaald moment in staat is. Zo zou je bijvoorbeeld kunnen uitrekenen op welke dag je het best kunt solliciteren. Voor de fysieke cyclus is de periode 23 dagen, voor de emotionele cyclus 28 dagen en voor de intellectuele cyclus is de periode 33 dagen.

Het bioritme in de figuur betreft een pasgeboren baby. E is de emotionele toestand van de baby t dagen na de geboorte. Hierbij hoort een formule van de vorm $E = a \sin(bt)$.

a Geef de waarden van a en b.

Zodra de emotionele toestand beneden -25 komt, zou het moeilijker worden om de emoties onder controle te houden.

b Hoeveel procent van een periode heeft de emotionele toestand een waarde die kleiner is dan -25? Licht je antwoord toe.

c F is de fysieke toestand van de baby. Onderzoek of F op de eerste verjaardag een dalend of een stijgend verloop heeft.

Annelies is op 1 januari 1983 geboren. Op 1 januari 2001 wordt ze dus 18 jaar. Vanaf die dag mag ze rijexamen doen. Ze wil dat doen op een dag waarop zowel haar fysieke als haar intellectuele toestand positief is. (De jaren 1984, 1988, 1992, 1996 en 2000 hebben een dag extra, dus 366 dagen.)

d Onderzoek welke de eerste drie dagen van januari 2001 zijn die voor het rijexamen in aanmerking komen.

(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2000, eerste tijdvak)

Opgave 10: Eb en vloed

De staatsuitgeverij publiceert elk jaar de Getijdentabellen voor Nederland. Daarin worden voor een aantal kustplaatsen zowel de dagelijkse tijdstippen voor hoogwater en laagwater als de verwachte hoogten (in centimeters) ten opzicht van Normaal Amsterdams Peil (NAP) vermeld. De volgende tabel is ontleend aan zo'n Getijdentabel. Hierin kan bijvoorbeeld worden afgelezen dat hoogwater te Harlingen op 1 juli 1989 verwacht werd op zowel het tijdstip 7 uur en 24 minuten ('s ochtends) als het tijdstip 20 uur en 4 minuten ('s avonds).

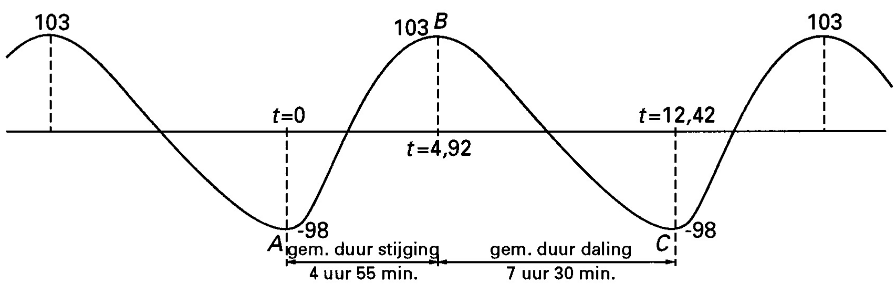
HARLINGEN

juli 1989

datum	laagwater		hoogwater	
	u.min	NAP -cm	u.min	NAP +cm
1 za	2.39	-95	7.24	78
	15.09	-105	20.04	91
2 zo	3.49	-97	8.45	93
	16.15	-109	21.05	88
3 ma	4.40	-99	9.40	105
	17.19	-109	22.15	84

Figuur 9

Door de gegevens over zeer lange tijd te middelen, krijgt men voor Harlingen de gemiddelde getijkromme die is weergegeven in de figuur.



Figuur 10

Uit de tabel kan voor zes gevallen de tijdsduur worden berekend die verstrijkt van laagwater tot het eerstvolgende hoogwater.

a Onderzoek met een berekening of het gemiddelde van die tijdsduren meer dan twee minuten afwijkt van de in de grafiek vermelde gemiddelde duur van 4 uur en 55 minuten.

De vorm van de grafiek laat duidelijk zien dat een model voor de gemiddelde getijdenbeweging dat uitgaat van één enkele sinusoïde niet erg realistisch is. Beter is het om het stijgende deel AB en het dalende deel BC elk met een afzonderlijke sinusoïde te beschrijven. Omdat de tijdsduur van 4 uur en 55 minuten ongeveer overeen komt met 4,92 uur, geldt voor de waterhoogte (h) voor waarden van t tussen 0 en 4,92 bij benadering:

$h = 100{,}5 \cdot \sin(0{,}64(t - 2{,}46)) + 2{,}5$

b Bereken uitgaande van dit model op welk tijdstip het water het snelst stijgt.

c Waarom gaat dit model niet op voor het stijgende deel van de grafiek na $t = 12{,}42$?

Voor het dalende deel BC geldt bij benadering $h = 100{,}5 \cdot \sin(a(t - b)) + 2{,}5$.

d Bereken a en b in twee decimalen nauwkeurig.

In de praktijk gebruikt men in combinatie met de Getijdentabellen voor het benaderen van de waterstand soms de *twaalfdelenregel*. Bij opkomend getij let men op de stijging (S) van de waterhoogte gerekend vanaf de laagwaterstand tot de eerstvolgende hoogwaterstand. De periode van opkomend getij wordt verdeeld in zes even grote tijdvakken en men veronderstelt:

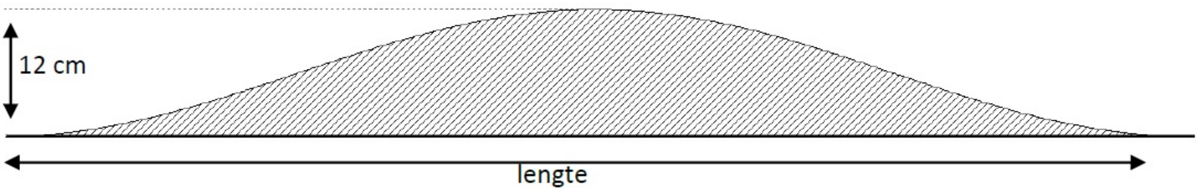
- in het eerste en het zesde tijdvak neemt de waterhoogte gelijkmatig met $\frac{1}{12}$ deel van S toe;
- in het tweede en het vijfde tijdvak neemt de waterhoogte gelijkmatig met $\frac{2}{12}$ deel van S toe;
- in het derde en het vierde tijdvak neemt de waterhoogte gelijkmatig met $\frac{3}{12}$ deel van S toe.

e Benader met de twaalfdenregel en de gegevens van de tabel de waterhoogte te Harlingen op 3 juli 1989 omstreeks 8:00 uur 's ochtends.

(bron: examen wiskunde A vwo 1992, tweede tijdvak)

Opgave 11: Verkeersdrempels

In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft een sinusvorm. Zie de onderstaande figuur.



Figuur 11

Voor de verkeersdrempel van de figuur hierboven, die hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur, is de volgende formule opgesteld: $h = 0{,}06 + 0{,}06\sin\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right)$ Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

a Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.

b Met de formule kun je berekenen over welke lengte deze drempel meer dan 10 cm hoog is. Bereken deze lengte in cm nauwkeurig.

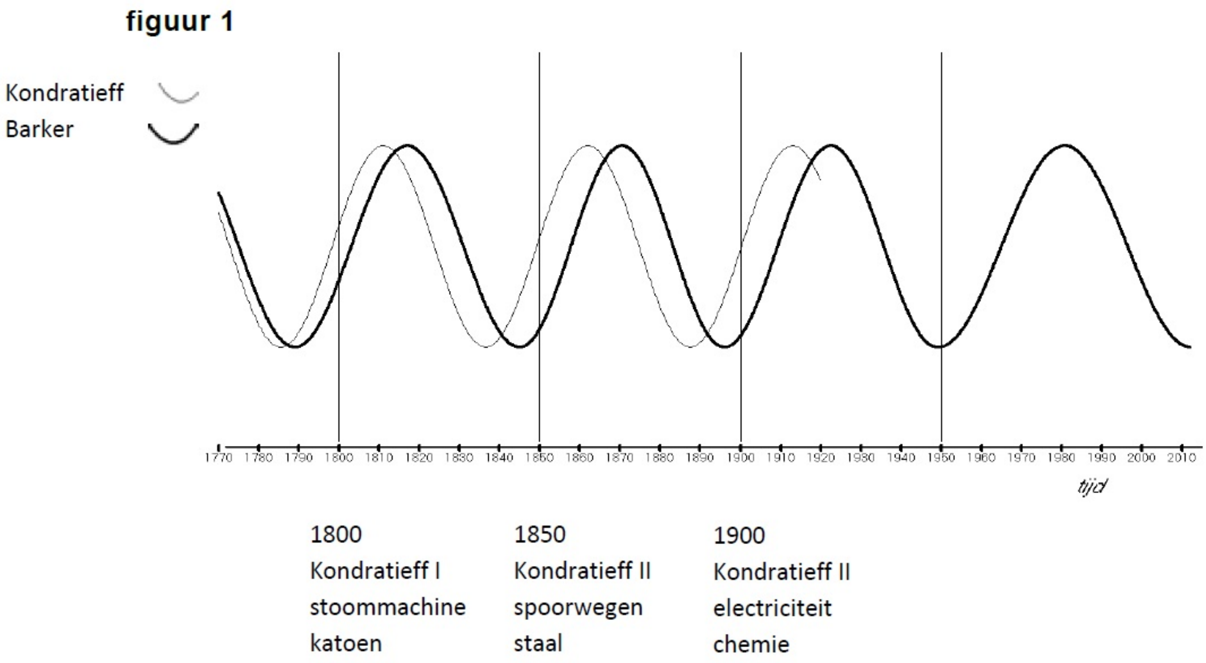
c De helling van de drempel is niet overal even groot. Hoeveel meter van het begin van de drempel ligt het eerste punt waar de drempel maximale helling heeft?

d Een verkeersdrempel die hoort bij een maximumsnelheid van 60 km/uur is 12 meter lang en 14 cm hoog. Daarbij hoort een formule van de vorm: $h = a + b\sin(c(x - d))$ Ook hier is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter. Hoe groot zijn a, b, c en d?

(bron: voorbeeldexamenopgave vwo A)

Opgave 12: Economische cycli

Golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker. In de economie komen vaak golfbewegingen voor: het gaat afwisselend beter en slechter met de economie. Economen proberen deze golfbewegingen te analyseren, onder andere om een volgende economische crisis te kunnen voorspellen. In november 2010 stond hierover een artikel in dagblad Trouw. In figuur 1, gebaseerd op dit artikel, zijn twee verschillende golfbewegingen te zien.



Figuur 12

De Russische econoom Kondratieff presenteerde rond 1920 de theorie dat er in de(kapitalistische) wereldeconomie golven of cycli voorkomen met een periode tussen de 50 en 60 jaar: na grote technische vernieuwingen leeft de economie steeds op, om een aantal jaren later weer in een crisis of slechte tijd te belanden. In figuur 1 is onder andere de golfbeweging volgens Kondratieff getekend tot 1920. Als je deze golfbeweging met dezelfde vaste periode ook na 1920 voortzet, wordt de crisis van 2009 hiermee niet goed voorspeld.

a Laat met een redenering gebaseerd op figuur 1 zien dat 2009 volgens Kondratieff niet in een periode van economische neergang zit.

De Amerikaanse beursanalist Barker gaat uit van een iets andere golfbeweging. Ook de golfbeweging volgens Barker is in figuur 1 getekend. Vanaf het dieptepunt in 1949 heeft de golfbeweging volgens Barker een periode die constant is. In figuur 1 is te zien dat de golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker steeds meer van elkaar gaan verschillen. In bepaalde perioden laten de beide grafieken zelfs een tegengestelde beweging van de economie zien: de grafiek volgens Barker stijgt, terwijl die van Kondratieff daalt of andersom.

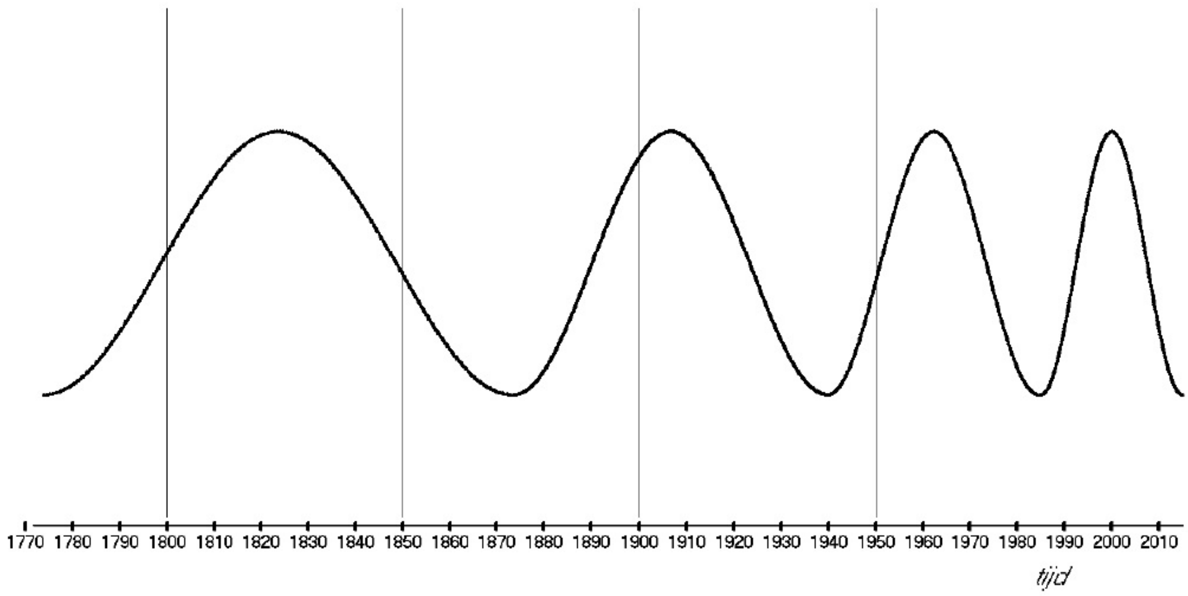
b Onderzoek met behulp van de figuur 1 in welke perioden tussen 1950 en 2050 de grafieken van Kondratieff en Barker een tegengestelde beweging van de economie laten zien.

De golfbeweging volgens Barker kan vanaf het dieptepunt in 1949 benaderd worden met de formule: $B = \sin\left(\frac{2\pi}{63}(t-1965)\right)$ met t het jaartal. Omdat we hier alleen het stijgen en dalen van de golfbeweging bekijken, doet het er niet toe welke evenwichtsstand en welke amplitude we kiezen. In deze formule is gekozen voor evenwichtsstand 0 en amplitude 1. Voor de golfbeweging volgens Kondratieff kan een soortgelijke formule opgesteld worden.

c Stel een formule voor de golfbeweging volgens Kondratieff op.

In figuur 2 is een derde grafiek getekend: de Slowaakse onderzoeker Smihula ging ook uit van golfbewegingen in de economie, maar volgens hem wordt de periode van deze golven steeds korter. Volgens Smihula begint en eindigt een golf bij een dieptepunt.

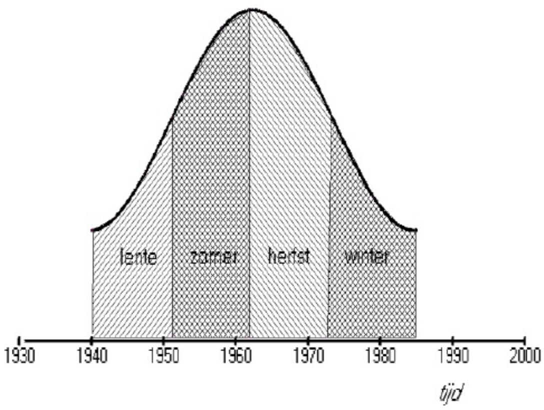
figuur 2



Figuur 13

In figuur 3 zie je de golf volgens Smihula tussen 1940 en 1985.De periode van deze golf is verdeeld in vier gelijke delen: deze delen worden respectievelijk lente, zomer, herfst en winter genoemd. De volgende golf volgens Smihula loopt van 1985 tot 2015. De periode van deze golf is tweederde van de periode van de vorige golf. Neem aan dat dit zich na 2015 zo voortzet, dus dat elke nieuwe golf een periode heeft die tweederde is van de vorige.

figuur 3



lente: invloedrijke innovatie trekt economie uit dal;
zomer: bloei van de economie tot oververhitting;
herfst: economie koelt af, koersen stijgen, inflatie daalt, zeepbel opgebouwd;
winter: zeepbel knapt, economische crisis

Figuur 14

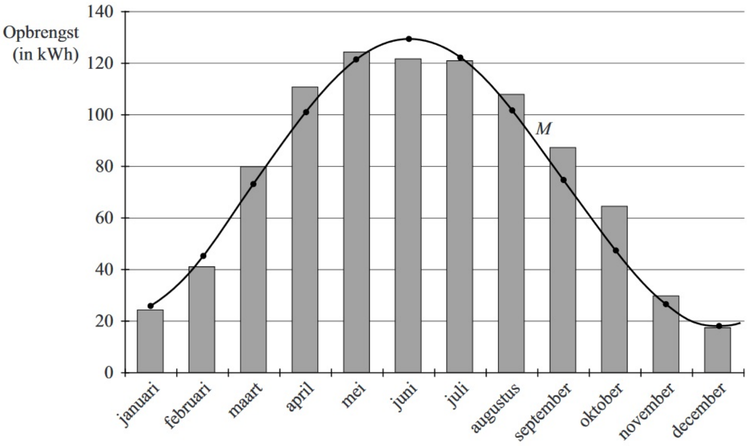
d Bereken in welk ‘seizoen’ (lente, zomer, herfst, winter) het jaar 2040 volgens Smihula zal vallen.

e Als elke nieuwe golf een periode heeft die tweederde is van de vorige, worden de perioden op den duur erg kort. Het is de vraag of dit realistisch is. Bereken in welk jaar er volgens deze regelmaat voor het eerst een periode begint die korter is dan één jaar.

(bron: voorbeeldexamenopgave vwo A)

Opgave 13: Zonnepanelen

Met zonnepanelen kan elektriciteit geproduceerd worden. De opbrengst van zonnepanelen varieert door het jaar heen: in de zomer is de opbrengst groter dan in de winter.
Bekijk het staafdiagram van de gemiddelde maandopbrengsten van een zonnepanelensysteem bij Leiden. Om de gemiddelde maandopbrengsten te bepalen, worden de maandopbrengsten van de laatste 10 jaar gebruikt. De opbrengst wordt gemeten in kilowattuur (kWh).



Figuur 15

De gemiddelde maandopbrengsten kunnen benaderd worden door een model: de kromme M in de figuur. De werkelijke gemiddelde maandopbrengst wijkt relatief het meest af in oktober van de door het model voorspelde waarde.

a Licht toe hoe je in de figuur kunt zien dat die relatieve afwijking inderdaad in oktober het grootst is en bereken deze relatieve afwijking.

b De kromme van de gemiddelde maandopbrengst M in de figuur is een sinusoïde. Stel een formule op voor M als functie van de tijd t in maanden. Neem hierbij voor januari $t = 1$.

c Bij een ander zonnepanelensysteem is voor elke dag in het jaar op basis van de gegevens van 10 jaar de gemiddelde dagopbrengst bepaald. De gemiddelde dagopbrengst kan benaderd worden met de formule:
$D = 6{,}34 + 4{,}19 \sin(0{,}0172(t - 74))$
Hierin is D de gemiddelde dagopbrengst in kWh en t de tijd in dagen met $t = 1$ op 1 januari.

Bereken op hoeveel dagen per jaar de gemiddelde dagopbrengst volgens deze formule groter is dan 10 kWh.

(bron: pilotexamen vwo wiskunde A in 2016, tweede tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.