6.5 Periodieke modellen

Inleiding

Je hebt tot nu toe berekeningen gemaakt en grafieken getekend bij gegeven sinusoïden. Het omgekeerde kan ook: bij een gegeven grafiek van een sinusoïde de formule opstellen. Met die formule kun je snel nieuwe punten van de grafiek vinden.

Verder kun je periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, vaak goed benaderen met een sinusoïde. Die sinusoïde is dan een model voor het verschijnsel.

Je leert in dit onderwerp

- bij een getekende sinusoïde de formule opstellen;
- sinusoïden gebruiken als model voor een periodiek verschijnsel.

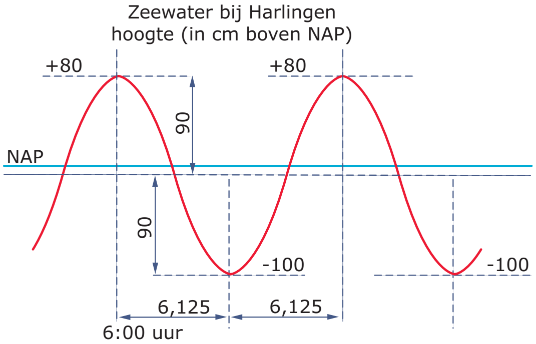
Voorkennis

- de grafiek van een sinusoïde tekenen;
- de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving van een sinusoïde aflezen uit de formule, dan wel uit de grafiek.

Verkennen

Opgave V1

In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van 12,25 uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.



Figuur 1

De bijbehorende grafiek lijkt op een sinusoïde.

a Bepaal de periode, de amplitude en de evenwichtslijn van die sinusoïde.

b Stel een passende formule op.

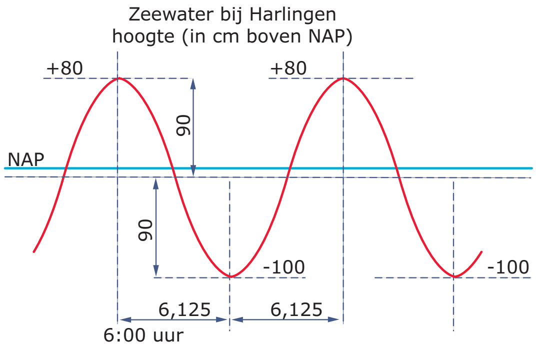
c Wat is het nut van zo'n formule?

Uitleg

Bekijk de applet: waterstanden Harlingen

Periodieke verschijnselen waarvan de grafiek golfvormig is, kun je vaak goed benaderen met een sinusoïde. Die sinusoïde is dan een model voor het verschijnsel.

In de getijdeninformatie van Harlingen kun je aflezen dat bij hoogwater de waterstand h ongeveer 80 cm boven NAP (Normaal Amsterdams Peil) zit en dat bij laagwater de waterstand ongeveer 100 cm onder NAP zit. Verder liggen de opeenvolgende tijdstippen van hoogwater (net als die van laagwater) ongeveer 12 uur en 15 minuten uit elkaar. Dat betekent een periode van 12,25 uur. Op een zekere dag is het hoogwater om 6:00 uur.



Figuur 2

Bekijk de schets van een grafiek die past bij de getijdeninformatie van Harlingen.

De bijbehorende formule bij de grafiek heeft de vorm: $h(t) = a \cdot \sin(b(t + c)) + d$.

In de grafiek kun je de volgende gegevens aflezen.

- De periode is 12,25 uur: $b = \frac{2\pi}{12,25} \approx 0,52$.
- De waterstand ligt tussen 0,8 m en -1,0 m. De amplitude is $a = 0,9$ m.
- De evenwichtsstand ligt 0,9 m onder hoogwater: $d = -0,1$.
- Hoogwater moet bij $t = 6$ zitten. Het direct ervoor liggende punt op de evenwichtsstand zit daar een kwart periode voor. Dit is bij $t = 6 - 3,0625 \approx 2,94$. Dit betekent dat $c \approx -2,94$.

De bijpassende sinusoïde wordt: $h(t) \approx 0,9 \sin(0,52(t - 2,94)) - 0,1$.

Opgave 1

Gegeven is de opgestelde sinusoïde als model voor de waterstand bij Harlingen in de **Uitleg**. Stel nu dat alle punten 20 centimeter hoger liggen. De hele grafiek verschuift dan 20 centimeter omhoog.

a Leg uit hoe uit de gegevens de periode, de evenwichtsstand en de amplitude worden gevonden.

b Leg uit dat $c \approx 2,94$.

Opgave 2

Ga uit van de functie $y = \sin(x)$. Schrijf het voorschrift op van de periodieke functies die ontstaan bij de gegeven wijzigingen.

a De amplitude wordt 4.

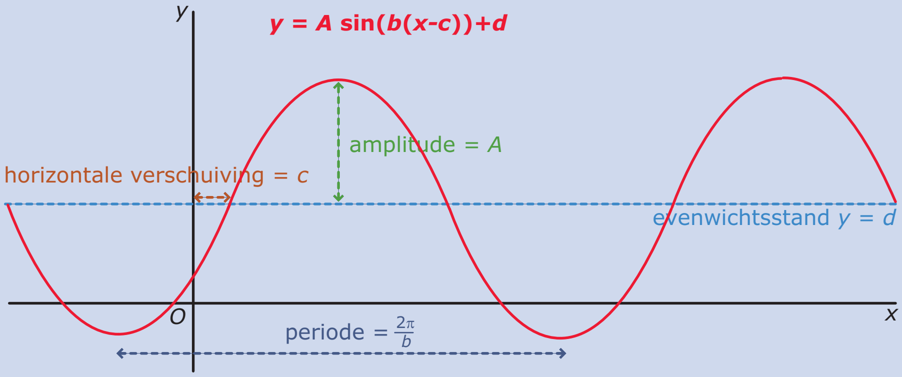
b De amplitude wordt 10 en de evenwichtsstand wordt 20.

c De periode wordt 4π en de amplitude wordt 4.

d De horizontale verschuiving is 2, de periode wordt 10, de amplitude wordt 5 en de evenwichtsstand wordt 10.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 3

Wanneer je een periodiek verschijnsel kunt beschrijven met een sinusoïde, is het bijbehorende functievoorschrift:

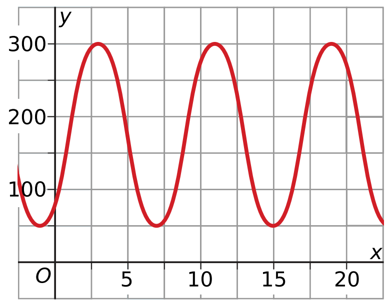
$y = a\sin(b(x-c)) + d$ met $b = \frac{2\pi}{p}$

Hierin is:

- d de **evenwichtsstand**, dit is de lijn $y = d$
- a de **amplitude**, de maximale uitwijking ten opzichte van de evenwichtsstand
- p de **periode**
- c de **horizontale verschuiving** ten opzichte van de standaardgrafiek $y = \sin(x)$

Voorbeeld 1

Bekijk de sinusoïde. Welk functievoorschrift kun je bij deze sinusoïde opstellen?



Figuur 4

Antwoord

De formule is van de vorm $y = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$.
Het maximum van de functie is 300 en het minimum 50. Dit betekent dat:

- de amplitude $a = \frac{300-50}{2} = 125$ is;
- de evenwichtsstand $d = 300 - 125 = 175$ is.

Twee opvolgende maxima zitten bij $x = 3$ en $x = 11$, zodat de periode 8 is.

Dit betekent dat $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.

De horizontale verschuiving is de x-waarde waarop de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
Hier is dat $x = 1$.

Het functievoorschrift wordt: $y = 125\sin\left(\frac{1}{4}\pi(x-1)\right) + 175$.

Opgave 3

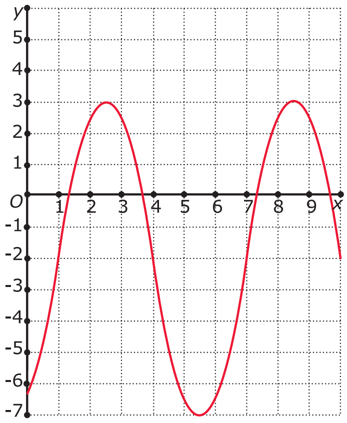
Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Waarom is $y = 125\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-9)\right) + 175$ ook een goed functievoorschrift?

b Geef nog een ander goed functievoorschrift.

Opgave 4

Je ziet hier een sinusoïde getekend.



Figuur 5

Maak er een functievoorschrift bij, uitgaande van $y = \sin(x)$.

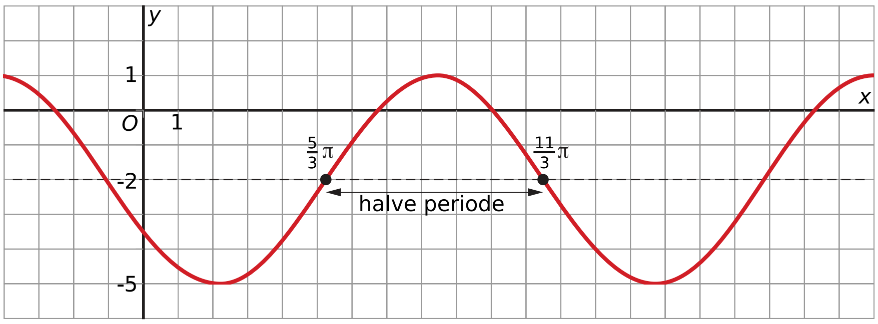
Voorbeeld 2

Een sinusoïde heeft een maximum van 1 en een minimum van -5. Het domein is $\mathbb{R}$. De evenwichtsstand $y = -2$ wordt onder andere bereikt als $x = \frac{5}{3}\pi$ en daarna als $x = \frac{11}{3}\pi$. Tussen deze beide x-waarden ligt de grafiek boven de evenwichtsstand.

Stel een formule op voor de beschreven sinusoïde.

Antwoord

De formule heeft de vorm $y = a\sin(b(x - c)) + d$.
Breng de situatie eerst in beeld.



Figuur 6

De twee punten op de evenwichtsstand liggen een halve periode uit elkaar.

- De periode is $2 \cdot \left(\frac{11}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi\right) = 4\pi$, zodat $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.
- De evenwichtsstand is -2.
- De amplitude $a = 3$.

De horizontale verschuiving is $\frac{5}{3}\pi$ ten opzichte van de standaardsinus, want bij die x-waarde gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.

De gevraagde formule is: $y = 3\sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{3}\pi\right)\right) - 2$.

Opgave 5

De grafiek van een sinusoïde f heeft minimum 10 voor $x = 1$ en eerstvolgend maximum 26 voor $x = 13$.

a Bereken de periode, de evenwichtslijn en de amplitude. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 2**.

b Geef een passende formule.

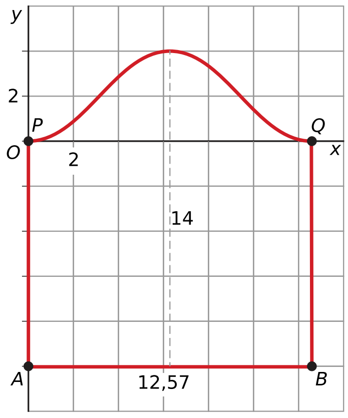
c Bereken in twee decimalen nauwkeurig: $f(12)$, $f(12{,}25)$, $f(12{,}5)$, $f(12{,}75)$ en $f(13)$.

d Los op: $f(x) > 20$.

Voorbeeld 3

Bekijk de figuur. Als je een cilinder met een diameter van 4 centimeter eerst schuin doorsnijdt zodat er twee cilinders ontstaan met een schuin vlak, en dan de ene cilinder in de lengterichting openknipt en plat neerlegt, krijg je de figuur. De bovenrand is een zuivere sinusoïde.

Stel voor deze rand een formule op. Gebruik daarvoor het assenstelsel in de figuur en neem aan dat punt P de coördinaten $(0{,}0)$ heeft.



Figuur 7

Antwoord

Bepaal vanuit de figuur dat:

- de evenwichtsstand is 2;
- de amplitude is 2;
- de periode is 4π.

Het maximum zit halverwege de bovenrand bij $x = 2\pi$.
Ten opzichte van de standaardsinus is de verschuiving π.
De formule wordt: $y = 2\sin(0{,}5(x - \pi)) + 2$.

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 3**.

a Stel voor de bovenrand een formule op uitgaande van $y = \sin(x)$.

b Waarom is de periode 4π?

c De lijn $y = 3$ snijdt de sinusoïde uit het voorbeeld in de punten A en B.
Bereken de lengte van lijnstuk AB.

d Een lijn evenwijdig aan PQ snijdt de bovenrand in A en B. Gegeven is $AB = 4$ cm. Bepaal de coördinaten van A en B.

Verwerken

Opgave 7

Het waterpeil bij een plaats in Nederland was om 3:25 uur hoog en om 15:28 uur weer hoog. Het water was toen 90 centimeter boven NAP. Dit verschilt 200 centimeter met laagwater.

Hoe hoog het water staat ten opzichte van NAP kun je goed beschrijven met een sinusoïde.
Stel een formule daarvoor op. Neem de tijd t in uur met $t = 0$ om 0:00 uur en de hoogte h in centimeter.

Opgave 8

Gegeven zijn karakteristieken van sinusoïden. Stel een passend functievoorschrift op van de vorm $y = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$.

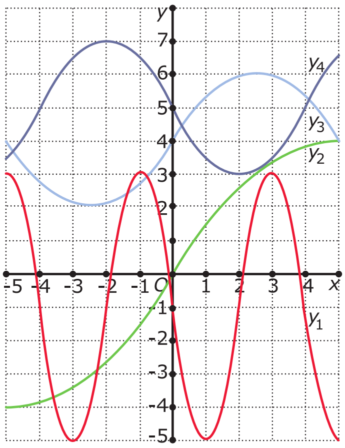
a De amplitude is 3, de periode is π, de evenwichtsstand is -1 en het maximum zit bij $x = \frac{\pi}{2}$.

b De amplitude is 5, de periode is 2, de evenwichtsstand is 2 en het maximum zit bij $x = 1{,}5$.

c De amplitude is 2, de periode is 6, de evenwichtsstand is 0 en het minimum zit bij $x = 3$.

Opgave 9

Stel bij de vier sinusoïden in de figuur een passend functievoorschrift op.



Figuur 8

Opgave 10

De grafiek van $f(x)$ is een sinusoïde. De evenwichtsstand is 1, de amplitude is 2, de periode is π en de grafiek gaat stijgend door het punt $\left(\frac{1}{6}\pi, 1\right)$.

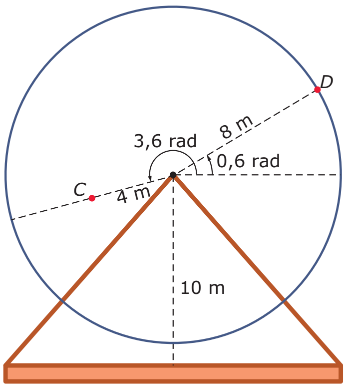
a Stel een formule op voor f.

b Bereken $f(0)$. Rond af op twee decimalen.

c Bereken de nulpunten van f. Rond af op twee decimalen.

Opgave 11

Een reuzenrad bevat de stoeltjes C en D. Stoeltje C draait op een afstand van 4 meter van de as in de rondte. De as van het reuzenrad bevindt zich op 10 meter boven de grond. Bekijk de getekende situatie. Het reuzenrad draait in 8 seconden één keer rond. Op $t = 2$ staat stoeltje C zo hoog mogelijk. Het reuzenrad draait tegen de wijzers van de klok in.



Figuur 9

a Bereken bij elke stand de hoogte van de stoeltje C ten opzichte van de grond.

b Stel een passend functievoorschrift op voor de hoogte van stoeltje C.

c Hoe hoog staat stoeltje C op tijdstip $t = 65$?

d Hoe lang zit je in stoeltje C elk rondje hoger dan 12 m?

Toepassen

Opgave 12: Temperatuur zeewater

De temperatuur T (°C) van het zeewater bij Zandvoort is goed te benaderen door een sinusoïde. De periode is 12 maanden. De laagste temperatuur is 6 °C op 1 maart en de hoogste 22 °C op 1 september.

a Stel een passende formule op voor T na t maanden met $t = 0$ op 1 januari.

b Hoe hoog is de zeewatertemperatuur op 1 oktober?

c Stel dat het zeewater door de opwarming van de aarde met 2 °C toeneemt. Welke formule kun je nu voor T opstellen?

Opgave 13: Ventiel fietsband

Als je bij een constante snelheid van een fiets de hoogte van een ventiel van een fietsband uitzet tegen de tijd krijg je een sinusoïde.

Tom fietst met een snelheid van 15 km/h. De diameter van zijn wielen is 90 centimeter. De hoogte van het ventiel van zijn banden varieert van 5 tot 85 centimeter.

a Hoe vaak draait het ventiel per seconde rond? Rond af op één decimaal.

b Stel een formule op van de hoogte van het ventiel h in centimeter na t seconden. Neem $t = 0$ als het ventiel op 45 centimeter hoogte zit en omhoog beweegt.

Testen

Opgave 14

Functie f met voorschrift $f(x)$ heeft een sinusvormige grafiek met een minimum in het punt (20,300) en een eerstvolgend maximum in het punt (32,400).

a Maak een schets van deze grafiek met x van 0 tot ten minste 40.

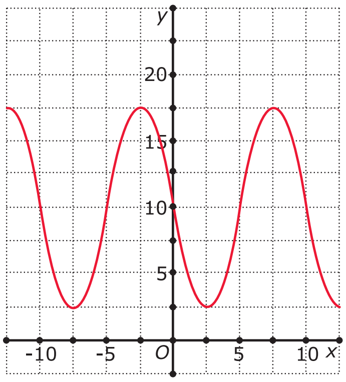
b Bereken de periode, de amplitude en de evenwichtslijn en stel een passend functievoorschrift op.

c Bereken $f(50)$, $f(51)$ en $f(52)$.

d Los op: $f(x) = 325$.

Opgave 15

Stel bij deze sinusoïde twee passende functievoorschriften op.



Figuur 10

Opgave 16

Onze ademhaling is bij benadering een periodiek verschijnsel. Een gezonde volwassen man ademt ongeveer 12 keer per minuut in en weer uit. De longinhoud $V(t)$ kan daarbij met zo'n halve liter toe- of afnemen, waarin t de tijd in seconden is. Het longvolume na inademen is 5,2 liter.

a Hoe groot is de ademhalingsfrequentie per minuut?

b Ga ervan uit dat $V(t)$ een sinusoïde is met op $t = 0$ een maximale longinhoud. Maak de grafiek van de longinhoud V uitgezet tegen de tijd t.

c Stel bij deze situatie een formule op voor $V(t)$.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.