6.4 Sinusoïden

Inleiding

Je hebt leren werken met de functie $y = \sin(x)$ (met x in radialen). Als je op deze functie transformaties toepast, krijg je andere periodes en kunnen de grafieken om een andere lijn dan de x-as gaan slingeren met een andere uitwijking. Dat is belangrijk omdat de sinusfunctie dan kan worden gebruikt om periodieke verschijnselen meer in het algemeen te beschrijven. Functies die door transformatie ontstaan uit $y = \sin(x)$ noem je sinusoïden.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip sinusoïde en de bijbehorende karakteristieken kennen en de grafieken ervan tekenen;
- de vergelijkingen $a \cdot \sin(b(x + c)) + d = p$ oplossen.

Voorkennis

- de grafieken van $y = \sin(x)$ tekenen met x in radialen;
- de vergelijkingen $\sin(x) = c$ oplossen als c een constante is.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot \sin(4x) + 3$.

a Maak met de grafische rekenmachine de grafiek van f op $[0,2\pi]$.

b Bepaal de periode van deze periodieke functie.

c Bereken de coördinaten van alle toppen van de grafiek op $[0,2\pi]$.

Gegeven is de functie $g(x) = 4 \cdot \sin(0{,}5(x - \pi)) - 1$.

d Maak met de grafische rekenmachine de grafiek van g op $[0,4\pi]$.

e Bepaal de periode van deze periodieke functie.

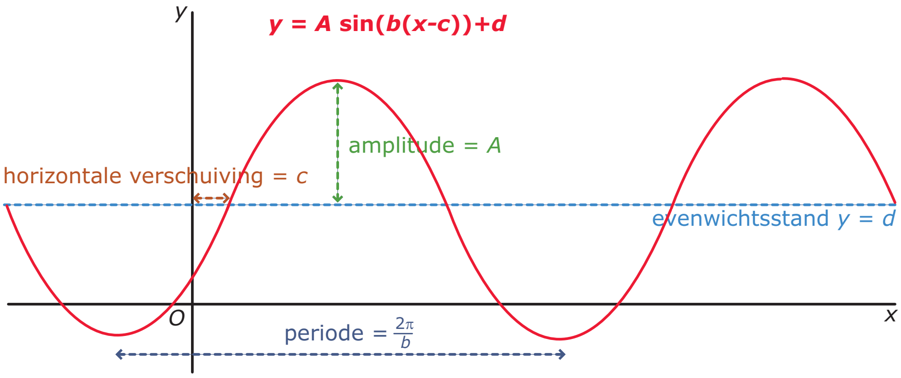
f Bereken de coördinaten van alle toppen van de grafiek op $[0,4\pi]$.

Uitleg

Bekijk de applet: sinusoïden

Door vervormingen van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je grafieken met functies van de vorm $g(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ maken. Zulke grafieken heten sinusoïden.

Een sinusoïde is periodiek en schommelt om de evenwichtsstand. De evenwichtsstand is het gemiddelde van het maximum en het minimum. Het verschil tussen het maximum en de evenwichtsstand heet de amplitude.



Figuur 1

Bekijk wat er gebeurt als je a, b, c en/of d verandert.

- a is de maximale uitwijking, de amplitude.
- b bepaalt de periode. De periode is $\frac{2\pi}{b}$.
- c is de horizontale verschuiving.
- d is de evenwichtsstand, de horizontale lijn $y = d$.

Wil je de grafiek van de sinusoïde $g(x) = 1{,}5 \sin(\pi(x-1)) + 0{,}5$ maken, dan lees je eerst uit de formule af:

- de amplitude is 1,5
- de evenwichtsstand is 0,5
- de periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
- de horizontale verschuiving is 1

Dit gebruik je om op een grafische rekenmachine geschikte vensterinstellingen te kiezen.

Het bereik van de functie is: $\text{B}_g = [0{,}5 - 1{,}5; 0{,}5 + 1{,}5] = [-1{,}2]$.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de functie $g(x) = 1{,}5 \sin(\pi(x-1)) + 0{,}5$.

a Maak de grafiek van g met de applet en controleer zo de afgelezen waarden voor de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de periode.

b Plot de grafiek van g op je grafische rekenmachine. Welke vensterinstellingen kies je?

c Het punt (0,0) ligt op de grafiek van $y = \sin(x)$. Welk punt op de grafiek van f ontstaat uit het punt (0,0) als je de grafiek van $y = \sin(x)$ vervormt?

d Welke toppen heeft de grafiek van g op het interval $0 \leq x \leq 2\pi$?

Opgave 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 + 2\sin(3(x+2))$.

a Lees uit het functievoorschrift de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving af.

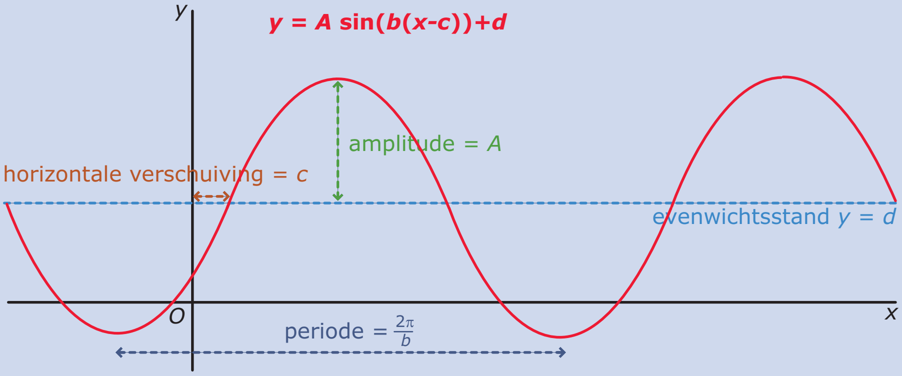
b Controleer met de applet in de **Uitleg** of de grafiek juist is.

c Oefen dit een aantal keer met andere sinusoïden.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: sinusoïden



Figuur 2

De grafiek van de functie $g(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$ is een **sinusoïde**. Dat is een functie die door vervormingen ontstaat uit $f(x) = \sin(x)$. Voor de grafiek van g geldt:

- de **amplitude** (maximale uitwijking uit de evenwichtsstand) is a (of $-a$ als a negatief is);
- de **periode** is $\frac{2\pi}{b}$ en dus is $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$;
- de **horizontale verschuiving** is c, dit is de verschuiving in de x-richting;
- de **evenwichtsstand** is $y = d$.

Voorbeeld 1

Plot de grafiek van $y = 2\sin(\pi(x-1)) + 5$ met geschikte vensterinstellingen.

Bepaal daarvoor eerst de periode, de evenwichtsstand en de amplitude van deze sinusoïde.

Antwoord

De periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, de evenwichtsstand is $y = 5$ en de amplitude is 2.

Verder zie je in de formule dat er sprake is van een horizontale verschuiving van 1.

De grafiek heeft dus het punt (1,5) op de evenwichtsstand.

Omdat de periode 2 is en je zeker één hele periode in beeld wilt hebben, kies je in ieder geval $0 \leq x \leq 3$.

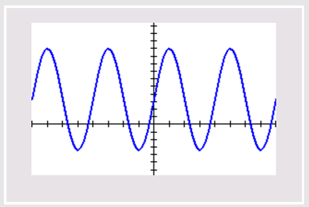
Verder zijn de maximale waarden $5 + 2 = 7$ en de minimale waarden $5 - 2 = 3$.
Dus kies je $0 \leq y \leq 8$ om ook in verticale richting de grafiek en de assen in beeld te hebben.

Ga na, dat je met deze instellingen de grafiek goed in beeld hebt.

Opgave 3

Bekijk deze grafiek van $y = 10\sin(4x) + 5$.

Welke vensterinstellingen moet je gebruiken om de grafiek zo in beeld te krijgen?



Figuur 3

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = 6\sin\left(\frac{\pi}{12}(x-8)\right) + 10$.

- Bepaal de periode en de coördinaten van alle toppen van de grafiek van f.
- Los op: $f(x) = 13$.

Antwoord

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$.

Je kunt nu met de grafische rekenmachine binnen één periode de toppen bepalen. Je kunt ook bedenken dat het maximum een kwart periode voorbij $x = 8$ zit, en dus bij $x = 8 + \frac{24}{4} = 14$ moet zitten.

En de grootte is $10 + 6 = 16$. Zo kun je ook de top bepalen die bij het minimum hoort.
Dit geeft als toppen: $(14{,}16)$ en $(26{,}4)$.
Omdat je de periode weet, kun je alle coördinaten van de toppen geven: $(14 + k \cdot 24{,}16)$ en $(26 + k \cdot 24{,}4)$.

Oplossing van de vergelijking $f(x) = 13$:
Bereken met de grafische rekenmachine de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en $y = 13$ binnen één periode.
Dit geeft bijvoorbeeld: $x = 10$ en $x = 18$.
De oplossing is: $x = 10 + k \cdot 24 \vee x = 18 + k \cdot 24$.

Opgave 4

Bekijk de functie in **Voorbeeld 2**.

a Beredeneer de coördinaten van een top met een minimum.

b Los op (benaderingen in drie decimalen nauwkeurig): $f(x) = 11$.

Opgave 5

Gegeven is de functie f met $f(x) = 3\sin(\pi(x-1)) + 10$.

a Bepaal de periode en de coördinaten van alle toppen.

b Los op: $f(x) = 11{,}5$.
Rond af op twee decimalen.

Verwerken

Opgave 6

De grafieken van de functies zijn sinusoïden. Geef van iedere sinusoïde de periode, de evenwichtsstand en de amplitude. Breng daarna de grafiek in beeld zodat je op de grafische rekenmachine twee periodes ziet.

a $y = 12\sin(x)$

b $y = 50\sin(2\pi x) + 10$

c $y = 2 + 3\sin(4(x-2))$

d $y = \text{-}25\sin(0{,}5\pi x) - 5$

Opgave 7

Los de vergelijkingen op.

a $10\sin(\pi(x-1)) + 2 = 9$

b $5\sin\left(\frac{1}{2}x + 4\right) = 1$

c $50 - 30\sin\left(\frac{2\pi}{15}x\right) = 45$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 12\sin(0{,}5(x-2)) + 1$ met $0 \leq x \leq 8\pi$.

a Welk bereik heeft f?

b Welke periode heeft f?

c Bereken de nulpunten van f. Rond af op twee decimalen.

d Bereken de toppen van de grafiek van f.
Rond indien nodig af op drie decimalen.

Opgave 9

De hoogte boven de grond van iemand die zich in een reuzenrad bevindt, kan worden beschreven door:

$$h = 11 + 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot t\right)$$

Hierin is h uitgedrukt in meter en t in seconden.

a Plot de grafiek van h.

b De getallen 11 en 10 uit de formule hebben een betekenis voor het reuzenrad. Welke?

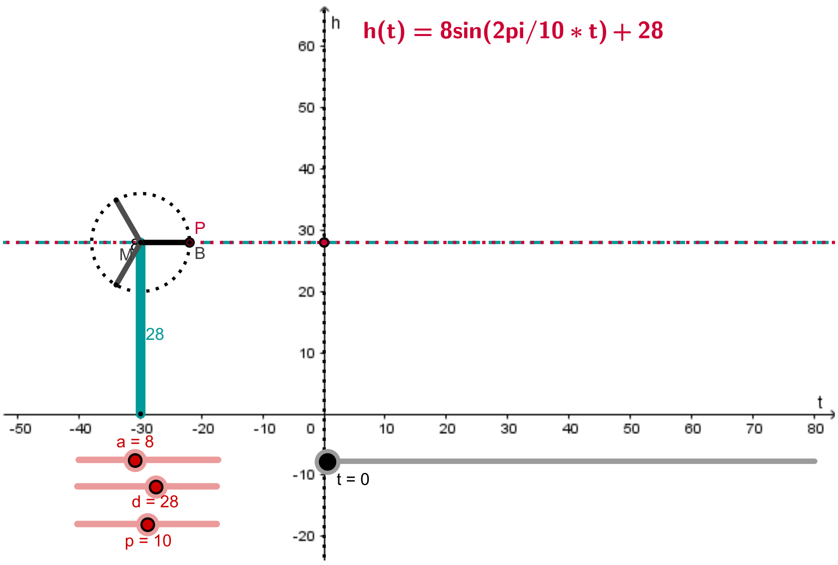
c Na één periode is het reuzenrad precies één keer rondgedraaid.
Bepaal de periode in seconden.

d Bereken hoelang een bakje van het reuzenrad binnen een periode hoger dan 18 meter boven de grond zit. Geef je antwoord in seconden afgerond op één decimaal.

Toepassen

Hier zie je een schematische weergave van een **windmolen** waarvan je de lengte van de wieken a (in m), de hoogte van het draaipunt d (in m) en de omwentelingstijd, de periode p (in s) kunt aanpassen.
De grafiek gaat over de hoogte van de uiterste punt P van de wiek, afhankelijk van de tijd t in seconden.

Bekijk de applet.



Figuur 4

Opgave 10

Bekijk de windmolen in **Toepassen**.

Van een zekere windmolen is de hoogte van het draaipunt 30 m, de lengte van de wieken 15 m en de omwentelingstijd (bij een zekere windsnelheid) 5 s.

a Stel een bijpassende formule op voordat je deze instellingen in de applet doet.
Controleer je antwoord met de applet.

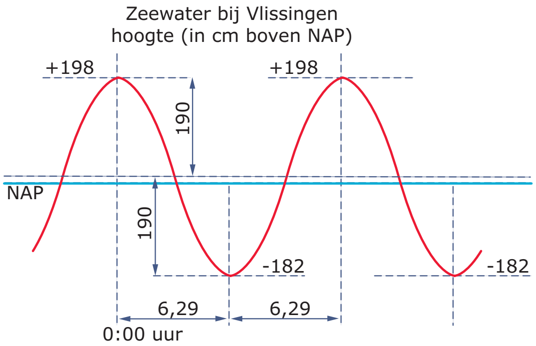
Deze windmolen staat achter een boerderij die een hoogte heeft van 20 m.

b Hoe lang is elke omwenteling de hoogte van de top van de wiek groter dan de hoogte van de boerderij?

c Je kunt de opdrachten bij a en b variëren door andere getallen te kiezen. Oefen met een medeleerling.

Opgave 11: Getijden

De grafiek in de volgende figuur geeft globaal de getijdenbeweging van het zeewater voor de haven van Vlissingen weer. Er wordt geen rekening gehouden met de invloed van de wind, met springtij, en dergelijke.



Figuur 5

a Hoe hoog is de gemiddelde waterstand volgens deze grafiek?

b Hoe groot is de maximale afwijking van de waterstand ten opzichte van het gemiddelde?

c Hoe groot is de periode van de getijdenbeweging?

Een benadering van de getijdenbeweging wordt gegeven door de volgende formule:

$$y = 8 + 190 \sin\left(\frac{2\pi}{12{,}25} \cdot (t + 3{,}0625)\right)$$

met t in uren t.o.v. middernacht op 21 juni 2008 en y in cm ten opzichte van het NAP.

d Vergelijk de grafiek van deze functie met de grafiek in de figuur hierboven. Vind je dat de formule een goed beeld geeft van de getijdenbeweging?

e Hoe groot is volgens de formule de periode en de amplitude?

f Hoeveel uur per periode is de waterstand hoger dan 180 cm?

Testen

Opgave 12

Bepaal van de volgende functies de periode, de amplitude, de evenwichtslijn en de horizontale verschuiving ten opzichte van $y = \sin(x)$.

a $y = 4\sin(4\pi x)$

b $y = 6 + 2\cos(x + 8)$

c $y = 0{,}5\sin(0{,}5\pi x)$

Opgave 13

Gegeven is de functie $h(t) = 20 + 12 \sin(0{,}5\pi(t - 2))$.

a Met welke vensterinstellingen krijg je de grafiek van h op je grafische rekenmachine goed in beeld?

b Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van h

c Los op: $h(t) \geq 30$. Benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.