6.3 Vergelijkingen met sinus

Inleiding

Met periodieke functies kun je, door de herhaling, gemakkelijk voorspellingen doen. Dezelfde uitkomsten komen met een vaste regelmaat weer terug. Dit bemoeilijkt echter het terugrekenen. Zelfs een eenvoudige vergelijking als $\sin(x) = 0{,}5$ heeft in principe oneindig veel oplossingen. Hoe vind je die allemaal en hoe schrijf je ze allemaal netjes op? Daarover gaat dit onderdeel. Bij de grafiek van $y = \sin(x)$ neem je x altijd in radialen.

Je leert in dit onderwerp

- de vergelijking $\sin(x) = c$ oplossen als c een constante is.

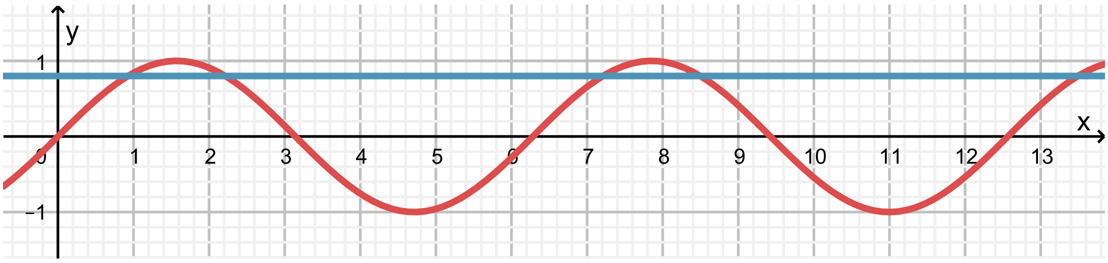
Voorkennis

- een grafiek tekenen op de grafische rekenmachine en dan uit de grafiek x vinden, als y gegeven is;
- symmetrie in grafieken gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Gebruik deze grafiek van $f(x) = \sin(x)$ en de symmetrie ervan.



Figuur 1

a Los op: $\sin(x) = 0{,}8$ met $0 \leq x \leq 4\pi$. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Los op: $\sin(x) = 0{,}8$ voor elke mogelijke waarde van x. Rond je antwoord af op drie decimalen.

Uitleg

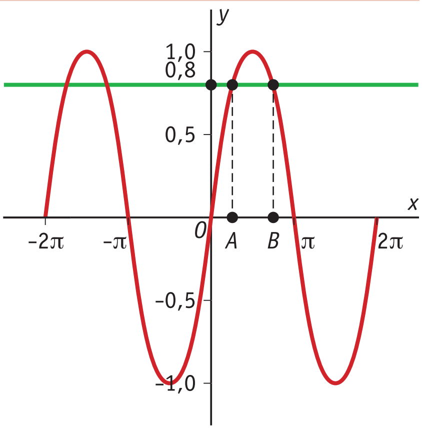
Bekijk de applet.

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$ en de lijn $y = 0{,}8$.

De lijn $y = 0{,}8$ snijdt de grafiek van $y = \sin(x)$ meerdere malen, er zijn dus meerdere oplossingen voor de vergelijking $\sin(x) = 0{,}8$. Per periode zijn er twee oplossingen. Als je voor x alle getallen toelaat zijn er zelfs oneindig veel oplossingen.

Je wilt $\sin(x) = 0{,}8$ oplossen:

- Zoek eerst de oplossing die zo dicht mogelijk bij de y-as ligt. Deze oplossing heet arcsinus van 0,8: $x = \arcsin(0{,}8) \approx 0{,}927$.
  Je (grafische) rekenmachine heeft een knop die de arcsinus berekent, meestal aangeduid door $\sin^{-1}$.
- Bepaal daarna de andere oplossing in dezelfde periode. Je gebruikt de symmetrie van de sinusgrafiek.
  Die oplossing is: $x = \pi - \arcsin(0{,}8) \approx 2{,}214$.



Figuur 2

- Gebruik de periode om alle oplossingen op te schrijven.
  De periode is 2π, de oplossingen zijn:
  $x \approx 0{,}927 + k \cdot 2\pi \vee x \approx 2{,}214 + k \cdot 2\pi$ met k een geheel getal.
  Op het interval $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ zijn de oplossingen:
  $x \approx -5{,}356 \vee x \approx -4{,}069 \vee x \approx 0{,}927 \vee x \approx 2{,}214$.

Bijzondere gevallen zijn:

$\sin(x) = 1$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = -1$ geeft $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\sin(x) = 0$ geeft $x = 0 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$
Voeg dit samen tot: $x = k \cdot \pi$

Als in $\sin(x) = c$, de c groter is dan 1 of kleiner is dan -1, dan zijn er geen oplossingen.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Welke oplossingen heeft $\sin(x) = 0{,}8$ als $0 \leq x \leq 4\pi$?

b Los op: $\sin(x) = 0{,}2$.

c Los op: $\sin(x) = -0{,}2$

Opgave 2

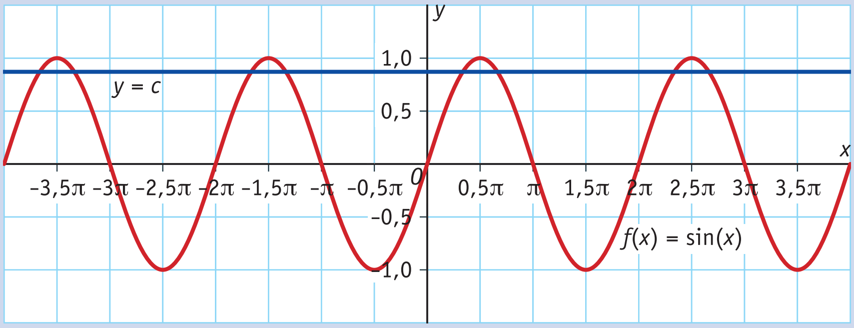
Waarom heeft $\sin(x) = 1{,}2$ geen oplossingen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$. De lijn $y = c$ snijdt de grafiek van f meerdere malen. Er zijn dus meerdere oplossingen voor de vergelijking $\sin(x) = c$. Per periode zijn er twee oplossingen. Als het domein $\mathbb{R}$ is, dan zijn er zelfs oneindig veel oplossingen.



Figuur 3

De oplossing van $\sin(x) = c$ die het dichtst bij de y-as ligt, heet de **arcsinus** van c: $x = \arcsin(c)$. Binnen één periode is er (vaak) nog een oplossing, alleen de vergelijkingen $\sin(x) = 1$ of $\sin(x) = -1$ hebben slechts één oplossing per periode.

De periode van $y = \sin(x)$ is 2π. Gebruik dit om alle oplossingen te vinden.

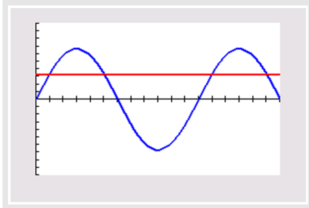
De vergelijking $\sin(x) = c$ heeft alleen oplossingen als $-1 \leq c \leq 1$.

Voorbeeld 1

Los op: $\sin(x) = 0{,}5$ met $0 \leq x \leq 3\pi$.

Antwoord

Plot eerst met de grafische rekenmachine de grafieken van $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = 0{,}5$ op het gegeven interval.



Figuur 4

Een oplossing van de vergelijking is: $x = \arcsin(0{,}5) \approx 0{,}524$.
In de grafiek zie ja dat er binnen de eerste periode nog een oplossing is, namelijk $x = \pi - \arcsin(0{,}5) \approx 2{,}618$.

Je ziet ook dat de lijn $y = 0{,}5$ de grafiek van $y = \sin(x)$ op $0 \leq x \leq 3\pi$ nog twee keer snijdt. Er zijn dus nog twee andere oplossingen.
De periode van $y = \sin(x)$ is 2π, zodat de andere twee oplossingen ongeveer $0{,}524+2\pi$ en $2{,}618+2\pi$ zijn.
De vier oplossingen: $x \approx 0{,}524 \vee x \approx 2{,}618 \vee x \approx 6{,}807 \vee x \approx 8{,}901$.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken alle oplossingen van $\sin(x) = 0{,}5$.

b Los nu op $\sin(x) = -0{,}5$.

Opgave 4

Gegeven is $f(x) = \sin(x)$ met $0 \leq x \leq 3\pi$.

a Los op $\sin(x) = 0{,}6$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

b Los op $\sin(x) < 0{,}6$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

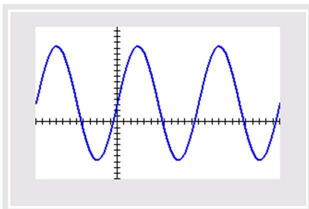
c Los op $\sin(x) < -0{,}6$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Los op: $3 \cdot \sin(x) + 1 = 0$.

Antwoord

Plot de grafiek van de functie $y = 3 \cdot \sin(x) + 1$ met de grafische rekenmachine. Het gaat bij de vergelijking $3 \cdot \sin(x) + 1 = 0$ om de nulpunten van deze functie, dat zijn er oneindig veel.



Figuur 5

De vergelijking $3 \cdot \sin(x) + 1 = 0$ kun je herleiden tot $\sin(x) = -\frac{1}{3}$.

De oplossingen hiervan zijn:
$x \approx -0{,}340 + k \cdot 2\pi \vee x = 3{,}481 + k \cdot 2\pi$

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Reken de oplossingen van de vergelijking $3 \cdot \sin(x) + 1 = 0$ na.

b Los op: $3\sin(x) + 1 = 2$

c Waarom kun je de vergelijking $3 \cdot \sin(x) + 1 = 5$ niet oplossen?

Opgave 6

Los op: $2 \cdot \sin(x) \leq -1{,}5$ met $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Verwerken

Opgave 7

Los op.

a $\sin(x) = 0{,}35$

b $\sin(x) = -0{,}35$

Opgave 8

Geef alle oplossingen van:

a $\sin(x) = 1$

b $\sin(x) = \sin(1)$

c $\sin(1) = x$

Opgave 9

Gegeven is de functie f met $f(x) = 2 \cdot \sin(x) - 1$ met $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

a Bereken alle nulpunten van deze functie in twee decimalen.

b Los op: $f(x) = 0{,}5$ in twee decimalen nauwkeurig.

c Wat is de kleinste waarde voor c zodanig dat de vergelijking $f(x) = c$ een oplossing heeft?

Opgave 10

Los op.

a $4 \cdot \sin(x) - 2 = -1$

b $10 + 20 \cdot \sin(x) = 8$

Opgave 11

Gegeven is de functie g met $g(x) = \sin(x - 2)$ met $0 \leq x \leq 2\pi$.

a Welke periode heeft g?

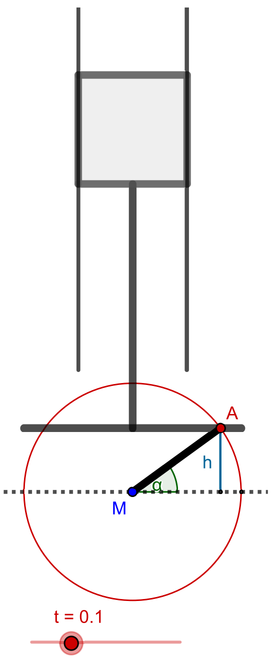
b Los op: $g(x) = 0{,}5$

Toepassen

Bekijk de applet: krukstang.

In de figuur zie je een schematische weergave van een **krukstang** MA die aan een zuiger is bevestigd. Als de zuiger op en neer beweegt, draait de krukstang rond.
Punt A zit helemaal rechts op de cirkel op $t = 0$.
Gegeven is $MA = 1$ decimeter.
De krukstang draait tegen de wijzers van de klok in, $x = \alpha$ is de draaihoek.

De hoogte van het punt A ten opzichte van de horizontale stippellijn is $h(x) = \sin(x)$.



Figuur 6

Opgave 12

Bekijk de formule voor de hoogte h van punt A boven de horizontale stippellijn.

a In welke eenheid is h uitgedrukt?

b Welke periode heeft h als x in graden wordt uitgedrukt?
En als x in radialen wordt uitgedrukt?

c Kun je een voordeel noemen van het werken met radialen ten opzichte van het werken met graden?

Het werken met decimeters als eenheid is niet gebruikelijk, liever werk je met meter, centimeter, millimeter.

d Hoe wordt het functievoorschrift voor de hoogte als je in mm werkt?
En wat verandert er dan aan de grafiek?

Opgave 13

De formule voor h in cm als functie van x in radialen is $h = 10 \cdot \sin(x)$.

a Maak de grafiek van h.

b Bij welke waarden voor x is $h(x) = 5$ cm?

c Bij welke waarden voor x is $h(x) = -5$ cm?

Testen

Opgave 14

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$. Los de volgende vergelijkingen op. Geef benaderingen in drie decimalen nauwkeurig.

a $\sin(x) = 0{,}95$

b $\sin(x) = -0{,}95$

Opgave 15

Gegeven is de functie $f(x) = 4\sin(x) + 1$ op $[-2\pi, 2\pi]$.

a Bereken alle nulpunten van de grafiek van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Los op $f(x) < 0$.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.