6.2 Sinusfunctie

Inleiding

Een regelmatige cirkelbeweging is een belangrijk periodiek verschijnsel. De hoogte van een punt op een draaiende cirkel, uitgezet tegen de tijd, levert een heel regelmatige periodieke grafiek: de sinusoïde. Daarbij komt vanzelf een nieuwe manier tevoorschijn om de grootte van een hoek aan te geven: in radialen, in plaats van in graden.

Je leert in dit onderwerp

- de grafiek van $y = \sin(x)$ tekenen met x in graden of in radialen;
- graden omrekenen in radialen en omgekeerd.

Voorkennis

- grafieken tekenen met de grafische rekenmachine;
- werken met sinus in rechthoekige driehoeken.

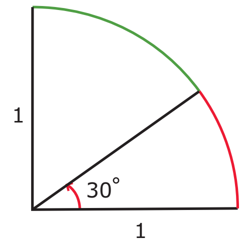
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet

Hoeken druk je al heel lang in graden uit. Toch hoeft dat niet, bekijk deze kwartcirkel maar eens. Hij heeft een straal van 1. Er staat een hoek van 30° in getekend.

a Hoe lang is de getekende cirkelboog? Leg uit waarom 30° overeenkomt met een booglengte van $\frac{1}{6}\pi$.



Figuur 1

Als je de grootte van een hoek door zijn booglengte in een cirkel met straal 1 beschrijft, krijg je hoeken in radialen. Dus 30° komt overeen met $\frac{1}{6}\pi$ radialen.

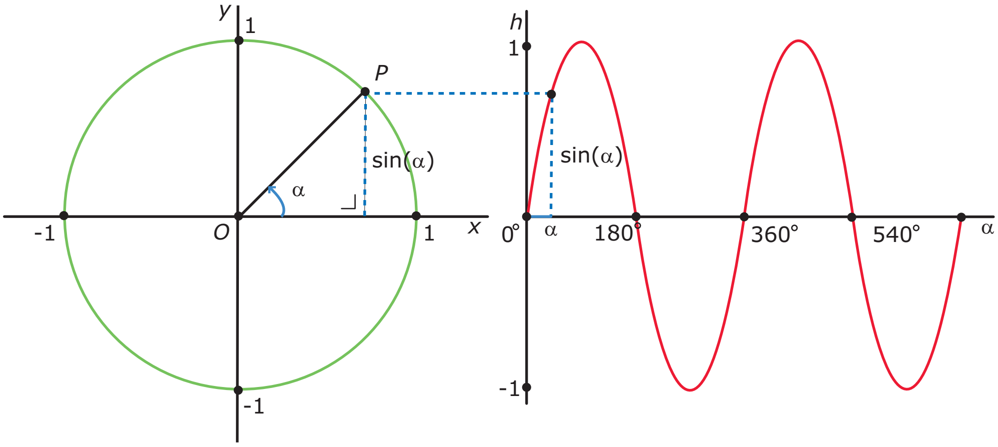
b Waarom is het van belang dat de cirkel waarin je de booglengte uitrekent een straal van 1 heeft?

c Reken maar eens een paar andere hoeken om van graden naar radialen.

Uitleg

Bekijk de applet: sinusgrafiek

Een punt P draait linksom (tegen de klok in) over een cirkel met straal 1, een eenheidscirkel.
Straal OP maakt een hoek α met de horizontale as vanuit O.
De hoogte h van punt P is: $h = 1 \cdot \sin(\alpha) = \sin(\alpha)$.
Dit is precies de y-coördinaat van punt P: $y_P = h = \sin(\alpha)$.



Figuur 2

Als punt P zich onder de x-as bevindt, is $y_P = \sin(\alpha)$ negatief.
P kan ook rechtsom (met de klok mee) draaien. Op deze manier is de hoek α negatief. De sinus van zo'n negatieve hoek kan weer positief of negatief zijn.

Naast de eenheidscirkel zie je de grafiek van $y_P = \sin(x)$. De grafiek ontstaat door voor elke draaihoek de sinus van die hoek uit te zetten op de verticale as. In plaats van α in graden wordt de hoek weergegeven door de bijbehorende booglengte x. De eenheid voor deze hoek heet radiaal, afgekort rad.

In een eenheidscirkel is de straal 1 en de omtrek dus $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
Dus bij 360° hoort 2π rad.
En bij 180° hoort π rad.

Bij een booglengte van 1 op de eenheidscirkel hoort een hoek van 1 rad.

Hoeken worden vanaf nu, tenzij anders vermeld, gegeven in radialen. Je ziet:

$\sin(\pi) = 0$, $\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1$ en $\sin\left(2\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(2\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = 1$.

Om graden om te rekenen naar radialen gebruik je dat $180° = \pi$ rad.

En zo is $40° = \frac{40}{180}\pi = \frac{2}{9}\pi$ rad.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Teken een eenheidscirkel (een cirkel met een straal 1).

a Teken P als de draaihoek $\alpha = 30°$. Bereken de bijbehorende waarde van h. Hoeveel radialen is α?

b Teken Q als de draaihoek $\alpha = 150°$. Bereken h. Hoeveel radialen is α?

c Teken R als de draaihoek $\alpha = 210°$. Bereken h. Hoeveel radialen is α?

d Teken S als de draaihoek $\alpha = 270°$. Bereken h. Hoeveel radialen is α?

e Hoeveel radialen hoort er bij 360°?

f Bij welke draaihoeken is $h = 1$?
Geef je antwoord in graden en daarna in radialen.

Opgave 2

Teken met je grafische rekenmachine de grafiek van $y = \sin(x)$. Neem x in graden en stel het venster zo in dat $-360 \leq x \leq 720$ en $-1{,}5 \leq y \leq 1{,}5$.

a Hoeveel periodes van de sinusgrafiek krijg je zo in beeld?

b Bereken $\sin(30°)$ en $\sin(390°)$. Leg uit waarom beide uitkomsten gelijk zijn.

c Bereken $\sin(30°)$ en $\sin(150°)$. Leg uit waarom beide uitkomsten gelijk zijn.

d Bij welke waarden van x vind je dezelfde uitkomst als $\sin(30000°)$?

e Bij welke waarden van x vind je dezelfde uitkomst als $\sin(-10000°)$?

Opgave 3

Teken met je grafische rekenmachine de grafiek van $y = \sin(x)$. Neem x in radialen en stel het venster zo in dat $-2\pi \leq x \leq 6\pi$ en $-1{,}5 \leq y \leq 1{,}5$.

a Hoeveel periodes van de sinusgrafiek krijg je zo in beeld?

b Bereken $\sin(1)$ en $\sin(1 + 2\pi)$. Leg uit waarom beide uitkomsten gelijk zijn.

c Bereken $\sin(1)$ en $\sin(\pi - 1)$. Leg uit waarom beide uitkomsten gelijk zijn.

d Bij welke waarden van x vind je dezelfde uitkomst als $\sin(211{,}5\pi)$?

e Bij welke waarden van x vind je dezelfde uitkomst als $\sin(-1500\pi)$?

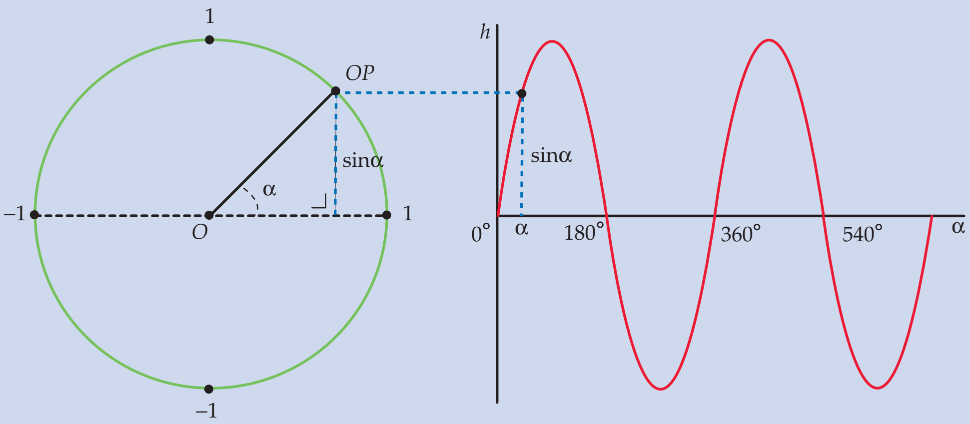
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de **eenheidscirkel** (cirkel met straal 1). Punt P beweegt over de eenheidscirkel en begint in het punt uiterst rechts te draaien. De bijbehorende **draaihoek** x is positief als je linksom draait, negatief als je rechtsom draait en kan alle waarden aannemen.

De draaihoek wordt in **radialen** uitgedrukt, dus door de lengte van de bijbehorende boog op de eenheidscirkel.

Bekijk de applet: sinusgrafiek 2



Figuur 3

De hoogte h van P ten opzichte van een horizontale lijn door het middelpunt van de cirkel is $h = \sin(x)$. De grafiek van h heet de **sinusgrafiek** en is periodiek met **periode** 2π.

180° komt overeen met π radialen of π rad, ofwel de halve omtrek van de eenheidscirkel. Tenzij anders aangegeven, wordt de hoekeenheid rad gebruikt. Let op de instelling van de rekenmachine.

Voorbeeld 1

Reken de hoeken in graden om naar radialen tussen 0 en 2π, en omgekeerd.

- 1°
- 90°
- 1 rad
- $\frac{1}{6}\pi$ rad

Antwoord

Bij het omrekenen van graden naar radialen gebruik je $180° = \pi$ rad.

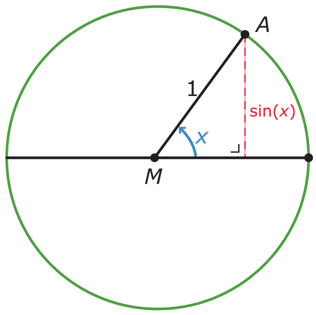
- $1°$ wordt $\frac{\pi}{180} = \frac{1}{180}\pi$ rad.
- $90°$ wordt $90 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2}\pi$ rad.

En omgekeerd:

- 1 rad komt overeen met $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57°$.
- $\frac{1}{6}\pi$ rad komt overeen met $\left(\frac{1}{6}\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 30°$.

Opgave 4

Punt A beweegt tegen de klok in over een eenheidscirkel met middelpunt M.
α is de draaihoek in graden en x is de lengte van de cirkelboog die bij die draaihoek hoort.



Figuur 4

a Hoeveel bedraagt x als $\alpha = 360°$?

b Vul de tabel in.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	225°	270°	330°
x									

Tabel 1

c Hoeveel radialen is 10°?

d Hoeveel graden is 10 radialen? Rond af op een geheel getal.

Voorbeeld 2

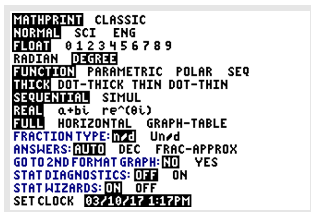
Bereken met de rekenmachine: $\sin(10°)$, $\sin(100°)$, $\sin(1000°)$ en $\sin(10000°)$

Waarom zijn de laatste twee uitkomsten hetzelfde?

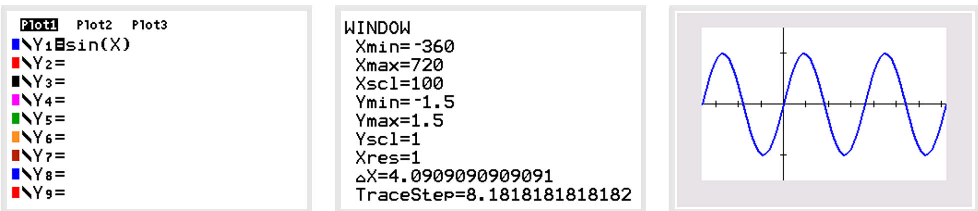
Antwoord

De draaihoek is gegeven in graden. Zorg ervoor dat de rekenmachine met graden rekent.
Ga na dat $\sin(10°) \approx 0{,}174$; $\sin(100°) \approx 0{,}985$; $\sin(1000°) \approx -0{,}985$ en $\sin(10000°) \approx -0{,}985$.

De grafiek van $y = \sin(x)$ met x in graden heeft een periode van $360°$.
De laatste twee uitkomsten zijn gelijk omdat het verschil tussen $1000°$ en $10000°$ gelijk is aan $9000° = 25 \cdot 360°$.
Dus dat zijn precies 25 periodes.



Figuur 5



Figuur 6

Opgave 5

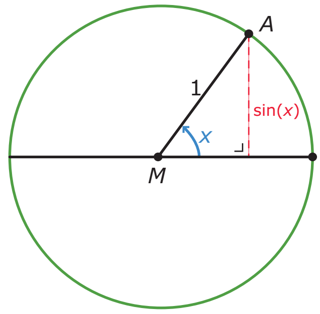
In **Voorbeeld 2** bekijk je de waarden van $\sin(x)$ als x in graden is. Hier zie je nog eens waar je de waarden van $\sin(x)$ in de eenheidscirkel vindt.

a Hoeveel bedraagt de periode van deze sinusfunctie?

b Leg uit waarom $\sin(x) = \sin(x + k \cdot 360°)$.

c Leg uit waarom $\sin(x) = \sin(180° - x)$.

d Bepaal $\sin(45°)$? Voor welke andere hoek x tussen $0°$ en $360°$ geldt: $\sin(x) = \sin(45°)$?



Figuur 7

Voorbeeld 3

Bepaal met de rekenmachine $\sin(1)$, $\sin(10)$, $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ en $\sin(360)$.

Bepaal ook $\sin(\pi - 1)$ en licht toe dat $\sin(\pi - 1) = \sin(1)$.

Antwoord

Er wordt nu in radialen gerekend, want er zijn geen gradentekens. Stel de rekenmachine in op radialen.

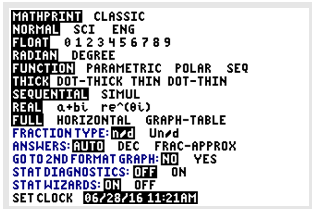
Ga na dat $\sin(1) = \sin(\pi - 1) \approx 0{,}841$; $\sin(10) \approx$ -$0{,}544$; $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 0{,}5$ en $\sin(360) \approx 0{,}959$.

Bekijk de grafiek van $y = \sin(x)$.

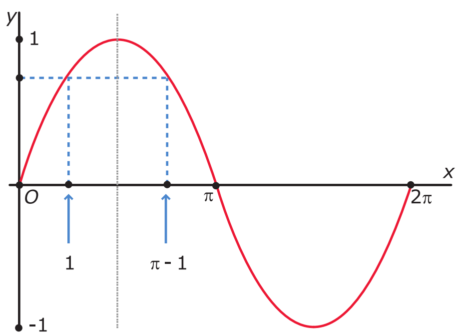
Je ziet dat $\sin(1)$ en $\sin(\pi - 1)$ symmetrisch liggen ten opzicht van de lijn $x = 0{,}5\pi$.

Hieruit volgt $\sin(1) = \sin(\pi - 1)$.

In het algemeen geldt: $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.



Figuur 8



Figuur 9

Opgave 6

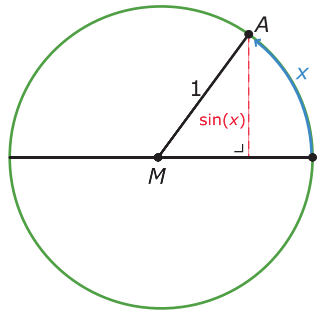
In **Voorbeeld 3** bekijk je de waarden van $\sin(x)$ als x in radialen is. Hier zie je nog eens waar je de waarden van $\sin(x)$ in de eenheidscirkel vindt.

a Hoeveel bedraagt de periode van deze sinusfunctie?

b Leg uit waarom $\sin(x) = \sin(x + k \cdot 2\pi)$.

c Leg uit waarom $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.

d Welke waarden kan $\sin(x)$ aannemen?



Figuur 10

Opgave 7

Gegeven is $\sin(x) = 0{,}1$ met x in radialen.

a Geef alle mogelijke hoeken x die hieraan voldoen en waarvoor geldt $0 \leq x < 2\pi$ aan in een eenheidscirkel.

b Hoe groot is $\sin(x + 2\pi)$?

c Hoe groot is $\sin(x + \pi)$?

d Hoe groot is $\sin(\pi - x)$?

Verwerken

Opgave 8

De hoeken zijn gegeven in graden. Bereken de bijbehorende booglengtes in de eenheidscirkel in radialen.

a 30°, 10°, 270°, 630°

De booglengtes in de eenheidscirkel zijn gegeven. Bereken de bijbehorende hoeken in graden nauwkeurig.

b $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{1}{3}\pi$; 2; π; 4,5; 10π

Opgave 9

Plot de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

a Bereken $f\left(1\frac{5}{6}\pi\right)$ en $f\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$. Verklaar de overeenkomst.

b Bereken $f\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ en $f\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$. Verklaar de overeenkomst.

Opgave 10

Plot de grafiek van $y = \sin(x)$ op het interval $-3\pi \leq x \leq 8\pi$.

a Hoeveel periodes zijn in beeld?

b Reken na dat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 0{,}5$.

c Geef een exacte waarde voor x die voldoet aan $\sin(x) = -0{,}5$.

d Is er een waarde voor x zo, dat $\sin(x) = 1{,}5$? Leg uit.

Opgave 11

Gegeven is dat $\sin(x) = 0{,}2$ met x in radialen.

a Welke waarde heeft $\sin(x + 2\pi)$?

b Welke waarde heeft $\sin(x + \pi)$?

c Welke waarde heeft $\sin(\pi - x)$?

d Welke waarde heeft $\sin(x + 11\pi)$?

e Welke waarde heeft $\sin(x + 12\pi)$?

Toepassen

Naast graden en radialen wordt ook de **decimale graad** gebruikt. Deze graad is gedefinieerd als $\frac{1}{400}$ deel van een cirkel en wordt aangegeven met grad (of gra of gon).
Een volledige cirkel is 400 grad.

Opgave 12

Bekijk wat onder decimale graden wordt verstaan.

a Hoeveel grad is 90°?

En hoeveel grad is $\frac{\pi}{3}$ rad?

b Toon aan dat $x° = \frac{10x}{9}$ grad.

c Geef een omzettingsformule om van radialen naar grad te gaan.

Testen

Opgave 13

Geef de antwoorden exact indien mogelijk, anders in drie decimalen benaderd.

a Deze hoeken zijn gegeven in graden: 60°, 45°, 180°, 300°, 330°, 350°, -350°.
Reken om naar radialen.

b Deze booglengtes van een eenheidscirkel zijn gegeven in radialen: π, $\frac{1}{3}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi$, 2π, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{12}\pi$, 2, $\frac{5}{3}\pi$.
Bereken de bijbehorende hoeken in graden.

Opgave 14

Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op $[-2\pi, 4\pi]$.

a Bereken $f\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi\right)$ en $f\left(\frac{1}{4}\pi\right) + f\left(\frac{1}{3}\pi\right)$. Verklaar het verschil.

b Bereken $f\left(\frac{1}{4}\pi\right)$ en $f\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$. Verklaar de overeenkomst.

c Laat in deze grafiek zien dat $\sin(-x) = \sin(\pi + x)$.

Practicum: Eenheidscirkel

In deze eenheidscirkel vind je de waarden van sinus en cosinus van een hoek in graden of in radialen in twee decimalen nauwkeurig.

Bekijk de applet