6.1 Periodiciteit

Inleiding

Er zijn veel verschijnselen die zich herhalen in tijd of ruimte. Bijvoorbeeld een muzieknummer dat je afspeelt met herhaling, een voetbalfragment dat telkens wordt herhaald, zomer en winter, de dagen van de week, rondjes in een reuzenrad. Je noemt dat: periodieke verschijnselen. Als het verschijnsel ook nog met een functie te beschrijven is, spreek je van een periodieke functie. Als je één geschikt stukje kent (de periode) kun je het vervolg helemaal voorspellen. In dit onderdeel zul je dat voor verschillende soorten van periodieke functies doen.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de periode vaststellen van een periodiek verschijnsel;
- berekeningen maken bij periodieke verschijnselen.

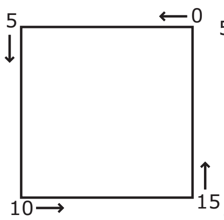
Voorkennis

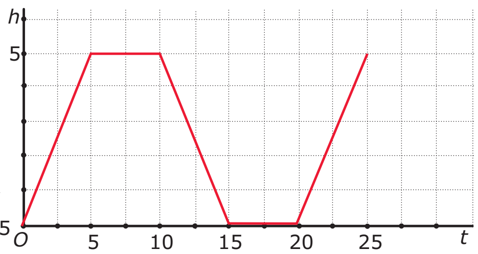
- grafieken tekenen met grote getallen op de assen;
- lineaire vergelijkingen oplossen;
- vergelijkingen oplossen met twee of meer oplossingen.

Verkennen

Opgave V1

Een mier loopt op een verticaal vlak vierkantjes: 5 cm omhoog, 5 cm horizontaal, 5 cm recht naar beneden, 5 cm horizontaal, enz. De snelheid is constant 1 cm/s. Hier zie je de grafiek van de hoogte h boven de horizontale as afhankelijk van de tijd t.





Figuur 2

a Leg uit waarom de grafiek er zo uitziet.

b Welke periode heeft de grafiek?

c Hoe hoog zit de mier na 614 seconden?

Uitleg 1

Stel het is vandaag maandag. Hoe bepaal je welke dag het over 100 dagen is?

Bij de dagen van de week is er sprake van een herhaling per 7 dagen. Als er zo'n herhaling optreedt, noem je dit een periodiek verschijnsel: na een bepaalde periode begin je als het ware weer van voor af aan. In dit geval heeft het periodiek verschijnsel een periode van 7 dagen.

Figuur 3

Geef de eerste maandag dagnummer 0. Het is opnieuw maandag op dagnummer 7 en 14 en op elk veelvoud van 7. Omdat je weet dat het over 98 (14×7) dagen ook maandag is, weet je dat het over 99 dagen dinsdag is en over 100 dagen woensdag.

Kies in dit soort situaties een basispatroon dat zich telkens herhaalt. Dat kan zijn maandag tot en met zondag (7 dagen), maar ook zondag tot en met zaterdag (ook 7 dagen) of donderdag tot en met woensdag.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

a Waarom is het 1071 dagen na een maandag weer een maandag?

b Stel dat het vandaag donderdag is. Wat voor dag is het 198 dagen later?

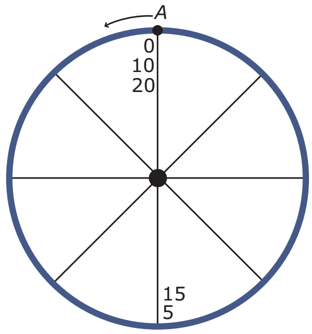
c Stel dat het vandaag zaterdag is. Wat voor dag was het 298 dagen geleden?

d Stel dat 12 maart op een maandag valt, op wat voor dag valt dan 2 mei van hetzelfde jaar?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Een wiel draait met steeds dezelfde snelheid rond (dit wordt een eenparige cirkelbeweging genoemd) en maakt één omwenteling in 10 seconden. Op tijdstip $t = 0$ staat punt A precies bovenaan. Het wiel draait linksom. Op welke tijdstippen staat punt A weer bovenaan?



Figuur 4

Omdat het wiel in 10 seconden ronddraait, bevindt punt A zich ook bovenaan op $t = 0,10,20,...$ (elk veelvoud van 10).
Als het wiel al aan het draaien was, bevindt punt A zich ook bovenaan op $t = -10, -20,...$
Dit kun je schrijven als: $t = 0 + k \cdot 10$
met k een geheel getal, of korter: $t = k \cdot 10$. k is een soort teller.
Als $k = 1$, dan is $t = 1 \cdot 10 = 10$,
als $k = 2$, dan is $t = 2 \cdot 10 = 20$.
als $k = -2$, dan is $t = -2 \cdot 10 = -20$.

Op welke tijdstippen staat punt A helemaal rechts?

Dit gebeurt op drie vierde van een omwenteling, dus op 7,5 seconden en elke 10 seconden vroeger of later weer: $t = ...; -12{,}5; -2{,}5; 7{,}5; 17{,}5; ...$
Dus op: $t = 7{,}5 + k \cdot 10$ met k een geheel getal.

Omdat de periode van draaiing 10 seconden is, draait het wiel per seconde $\frac{1}{10}$ deel.

Dit heet de frequentie van de draaiing.

Opgave 2

Bekijk in **Uitleg 2** nog eens het verhaal van het ronddraaiende wiel. Ga er van uit dat het punt A in 10 seconden rond draait en op $t = 0$ bovenaan zit.

a Op welke tijdstippen zit punt A helemaal links?

b Beschrijf waar punt A zit op $t = 7 + k \cdot 10$ (teken eventueel zelf zo'n wiel, de grootte is onbelangrijk).

c De frequentie van draaiing is $\frac{1}{10}$ per seconde.

Hoe groot is de frequentie van dit wiel per minuut?

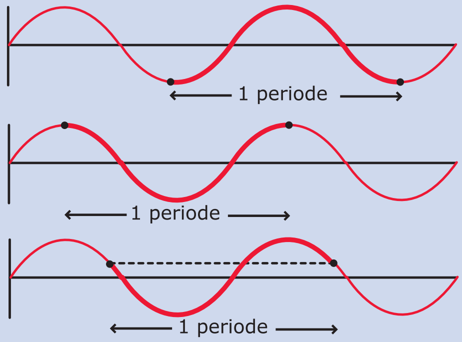
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **periode** van een periodiek verband is de lengte van het kortste interval waarin iets zich herhaalt.

In de grafiek is een herhalende golfbeweging zichtbaar. Er zijn verschillende intervallen voor de periode mogelijk:

- van een maximum tot het eerstvolgend maximum;
- van een minimum tot het eerstvolgend minimum;
- een willekeurig punt tot het volgende punt waarop de grafiek dezelfde hoogte én dezelfde daling of stijging heeft als in het andere punt.



Figuur 5

Voor de lengte van het interval waarop de grafiek zich herhaalt is het niet belangrijk uit welk deel van de grafiek het interval komt. Die lengte is altijd gelijk als de grafiek zuiver periodiek is. Soms wordt de periode ook wel **golflengte** genoemd.

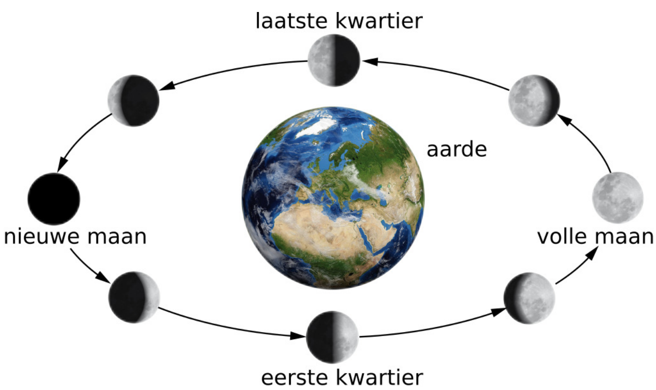
Als op tijdstip t een bepaalde uitkomst voorkomt, komt diezelfde uitkomst ook voor op $t + k \cdot$periode, waarin k een geheel getal is.

Het aantal periodes per tijdseenheid heet de **frequentie**:

frequentie $= \frac{1}{\text{periode}}$.

Voorbeeld 1

De schijngestalten van de maan staan bekend als nieuwe maan, eerste kwartier (halve maan), volle maan en laatste kwartier (weer halve maan). Dit is een periodiek verschijnsel met een periode van gemiddeld ongeveer 30 dagen (in de loop van het jaar wisselt de lengte een beetje).



Figuur 6

Op 12 januari 2017 was het volle maan.

- Bereken op welke datum in mei 2017 het ook volle maan is. Ga hierbij uit van een periode van gemiddeld 30 dagen.
- Bereken de jaarlijkse frequentie van nieuwe maan.

Antwoord

Tel 30 dagen op bij 12 januari, dat geeft 11 februari. Dit proces herhalend geeft 13 maart, 12 april en 12 mei. Op 12 mei 2017 was het ook volle maan. De volgende datum is in juni.

De jaarlijkse frequentie van nieuwe maan is $\frac{1}{\frac{30}{365}} = \frac{365}{30} \approx 12{,}2$ per jaar.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** over de schijngestalten van de maan.

a Hoe groot is de periode van dit verschijnsel?

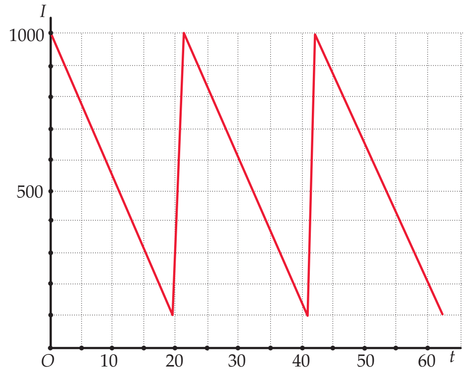
b Met welke frequentie is het volle maan? Bereken het aantal herhalingen per half jaar.

c Op welke datum is het volle maan in januari 2018, uitgaande van volle maan op 12 mei 2017?

Voorbeeld 2

Een opslagtank bevat 1000 liter brandstof op dag $t = 0$. In 20 dagen neemt die hoeveelheid gelijkmatig af tot 100 liter. Dan wordt de tank in een dag bijgevuld tot 1000 liter, enzovoort.

Hoeveel liter brandstof bevat de tank na 75 dagen?



Figuur 7

Antwoord

De periode van de inhoud is 21 dagen.
Op de tijdstippen $t = 75 + k \cdot 21$ is er een gelijke inhoud als op dag 75.
Op dag 12 heeft de tank dezelfde inhoud als op dag 75, want hier zitten precies drie periodes tussen ($75 - 3 \cdot 21 = 12$).
In 20 dagen gaat er 900 liter uit de tank, dat is 45 liter per dag. Van $t = 0$ naar $t = 12$ gaat er $45 \cdot 12 = 540$ liter uit.
Er was 1000 liter. Er is $1000 - 540 = 460$ liter over op $t = 12$, en derhalve ook op $t = 75$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2**. De hoogte van de brandstof in de tank is een periodiek verschijnsel.

a Hoeveel bedraagt de periode?

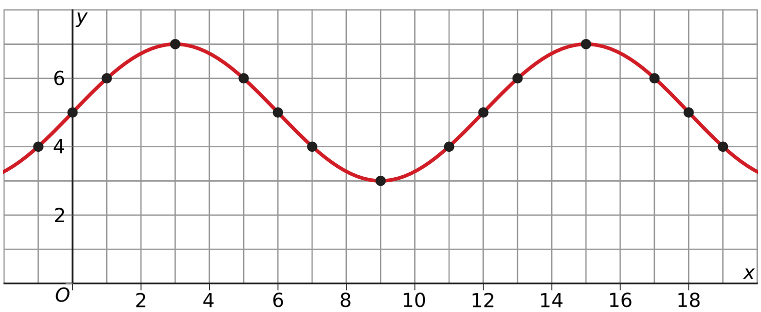
b Leg uit waarom er 550 liter in de tank zit op: $t = 10 + k \cdot 21 \vee t = 20{,}5 + k \cdot 21$.

c Voor welke waarden van t zit er 100 liter in de tank?

d Hoeveel zit er in de brandstoftank na 500 dagen?

Opgave 5

Bekijk de grafiek van de periodieke functie f. De grafiek loopt naar beide kanten oneindig ver door.



Figuur 8

a Bepaal de periode van deze functie.

b Bepaal $f(81)$ en $f(91)$.

c Los op: $f(x) = 6$ met $75 \leq x \leq 85$.

d Bepaal $f(-5)$.

e Los op: $f(x) = 4$ met $-100 \leq x \leq -90$.

Voorbeeld 3

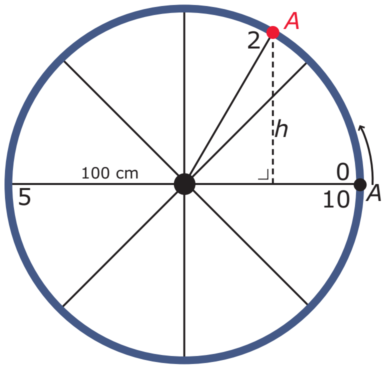
Bekijk de applet: waterrad

Hier is schematisch een waterrad weergegeven dat in 10 seconden ronddraait.

Punt A bevindt zich helemaal rechts op de cirkel op het tijdstip $t = 0$.
Gegeven is dat de straal MA van het waterrad 100 centimeter is.
Het waterrad draait tegen de wijzers van de klok in.

h is de hoogte van punt A ten opzichte van de as van het rad, zodat op tijdstip $t = 0$ de hoogte ook 0 centimeter is.

Hoe hoog is het punt op tijdstip $t = 42$?



Figuur 9

Antwoord

De periode van het waterrad is 10 seconden. De hoogte op $t = 42$ is hetzelfde als de hoogte op $t = 2$.

Punt A heeft dan $\frac{2}{10}$ van de cirkel doorlopen en is $\frac{2}{10} \cdot 360° = 72°$ gedraaid.

Voor het berekenen van de hoogte heb je de sinus nodig:

$\sin(72°) = \frac{h}{100}$ en hieruit volgt $h = 100 \cdot \sin(72°) \approx 95{,}1$ cm.

Op $t = 42$ is de hoogte ongeveer 95 cm.

Opgave 6

Bestudeer **Voorbeeld 3** over het ronddraaiende punt A.

a Bereken de hoogte h als $t = 1$. Rond af op gehele centimeters.

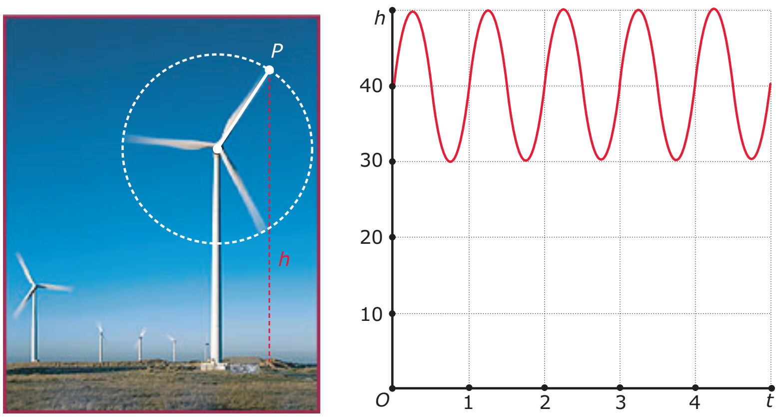
b Hoe groot is de hoogte h als $t = 31$?

c Bereken de hoogtes voor de gehele waarden van t vanaf 0 tot en met 10.
Rond indien nodig af op gehele centimeters.

d Met welke frequentie draait dit waterrad?
Ga uit van een tijdseenheid van een uur.

Opgave 7

Bekijk het punt P op de tip van een rotorblad van een ronddraaiende windmolen. De grafiek van de functie $h(t)$ is getekend, waarin h de hoogte van punt P boven de grond in meter voorstelt en t de tijd in seconden.



Figuur 10

a Met welke periode draait het rotorblad van de windmolen?
Met welke frequentie (omwentelingen per minuut) draait het rotorblad?

b Hoe hoog zit de as van de windmolen boven de grond?
En hoe lang is het rotorblad?

c Teken de grafiek van de hoogte van de tip van één van de twee andere rotorbladen.

d De wind neemt af, de windmolen gaat een half keer zo snel draaien.
Teken de bijbehorende grafiek.

Opgave 8

Een punt P beweegt linksom over een cirkel met straal 1 om de oorsprong O van een Oxy-assenstelsel. De afstand a die het punt heeft afgelegd hangt af van de hoek α waarover OP is gedraaid. Neem aan dat $a = 0$ als $\alpha = 0$.

a Hoeveel is $a(90°)$? En $a(180°)$? (Geef exacte waarden.)

b Leg uit waarom je nu te maken krijgt met hoeken die groter zijn dan 180°. Leg ook uit waarom de draaihoek zelfs groter kan zijn dan 3690°.

c Wat zou een draaihoek van -60° betekenen?

d Bepaal nu $a(360°)$, $a(450°)$, $a(60°)$ en $a(-30°)$.

e Hoeveel is $a(1°)$?

f Is $a(\alpha)$ een periodieke functie? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 9

Een draaimolen draait steeds met dezelfde snelheid in 20 seconden rond.

a Hoeveel bedraagt de frequentie van de draaiing per minuut?

b Hoeveel bedraagt de frequentie van de draaiing per uur?

c Hoeveel bedraagt de frequentie van de draaiing per seconde?

Opgave 10

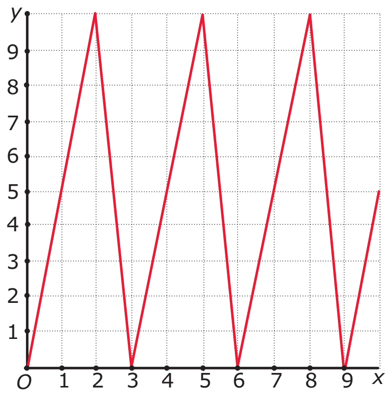
Bekijk de grafiek van de periodieke functie f.

a Hoeveel bedraagt de periode van de grafiek?

b Bereken $f(25)$.

c Voor welke waarden van x is $f(x) = 10$?

d Los op: $f(x) = 5$ met $12 \leq x \leq 15$.



Figuur 11

Opgave 11

Bekijk de figuur. Punt A ligt op een wiel op afstand 1 van het middelpunt. Noem de hoogte van punt A ten opzichte van de horizontale as door het middelpunt $h(t)$. Punt A begint rechts, zodat $h(0) = 0$. Het wiel draait in 6 seconden linksom rond.

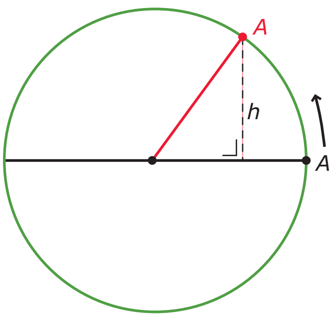
a Hoeveel bedraagt de frequentie van de draaiing per minuut?

b Bepaal $h(1{,}5)$.

c Bepaal $h(4{,}5)$ en $h(10{,}5)$.

d Bereken $h(0{,}5)$.

e Geef alle waarden van t die voldaan aan de vergelijking $h(t) = h(0{,}75)$.



Figuur 12

Opgave 12

Een torenklok heeft een grote wijzer met een lengte van 1,5 m. De beide wijzers zitten bevestigd op de as van de klok op 45 m boven de grond. Punt T stelt de tip van deze grote wijzer voor. De hoogte h in m van T boven de grond hangt af van de draaihoek α. Neem aan dat $\alpha = 0$ om 12:00 uur.

a Hoe hoog zit T boven de grond op 2:10 uur?

b Schets een grafiek van $h(\alpha)$.

Opgave 13

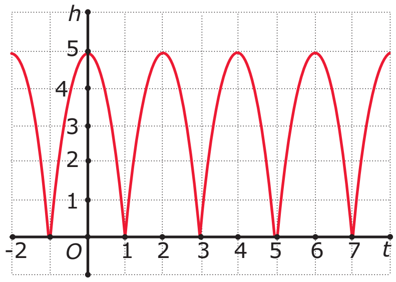
Bekijk de periodieke grafiek. Voor - 1 ≤ x ≤ 1 geldt de formule:
$h(t) = 5 - 5t^2$

a Bereken $h(0)$ en $h(0,5)$.

b Bepaal de periode van de grafiek.

c Bereken $h(6)$ en $h(6,5)$.

d Bereken $h(15)$ en $h(15,5)$.

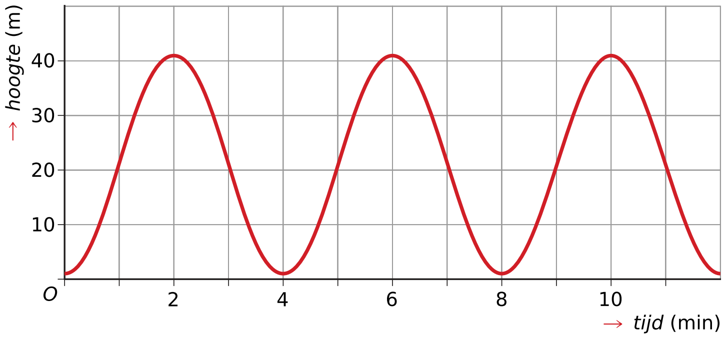


Figuur 13

Toepassen

Opgave 14: Reuzenrad

Peter stapt in een reuzenrad. Bekijk de grafiek waarin de hoogte van Peter ten opzichte van de grond is af te lezen na t minuten.



Figuur 14

a In hoeveel minuten draait het reuzenrad rond?

b Hoeveel rondjes heeft Peter gemaakt?

c Hoe groot is de straal van het reuzenrad?

Opgave 15: Hartslag

Op de intensive care van een ziekenhuis wordt met hartbewakingsapparatuur de hartfunctie van patiënten bewaakt. Bekijk de grafische weergave van de hartslag van een patiënt. De hartslagfrequentie wordt uitgedrukt in het aantal slagen per minuut.

Figuur 15

a Hoe groot is de hartslagfrequentie van deze patiënt?

b Wat gebeurt er met de periode van de grafiek als de hartslagfrequentie omhoog gaat?

Testen

Opgave 16

Een grafiek bestaat in een Oxy-assenstelsel uit rechte lijnstukjes tussen de punten (100,1000), (110,600), (140,1000), (150,600), (180,1000), enz. Het patroon gaat naar links en rechts oneindig ver door.

a Welke periode heeft deze grafiek?

b Bereken de waarde van y bij $x = 250$.

c Teken de grafiek met $0 \leq x \leq 100$.

d Bereken de waarde van y bij $x = -250$.

e Hoeveel getallen x met $0 \leq x \leq 100$ bestaan er bij $y = 900$?

Opgave 17

Een wiel met een straal van 30 cm draait linksom rond met constante snelheid. De omlooptijd is 20 seconden. De hoogte in centimeter van punt A aan de buitenkant van het wiel, gemeten ten opzichte van het middelpunt, noem je $h(t)$ met t in seconden. Het punt A begint bovenaan, dus $h(0) = 30$.

a Met welke frequentie draait punt A?

b Bereken $h(35)$.

c Bereken $h(18)$ in één decimaal nauwkeurig.

d Bereken $h(76)$ in één decimaal nauwkeurig.

e Geef alle tijdstippen t met $-40 \leq t \leq 40$ waarvoor geldt $h = 0$.