5.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Machtsfuncties**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- recht evenredig met een macht — machtsverbanden;
- machtsfuncties, eigenschappen afhankelijk van exponent — machtsvergelijking;
- kwadratische functie — dal- en bergparabool — top — symmetrieas — kwadratische vergelijking;
- kwadraat afsplitsen — *abc*-formule;
- veeltermfunctie — derdegraads - en vierdegraads functie.

Activiteitenlijst

- machtsverbanden herkennen — heen- en terugrekenen bij machtsverbanden;
- de eigenschappen van machtsfuncties vinden — werken met transformaties van machtsfuncties;
- kwadratische functies tekenen — kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen;
- kwadratische functies schrijven als machtsfuncties — de *abc*-formule gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- werken met veeltermfuncties.

Achtergronden

Een kwadraat is (de oppervlakte van) een vierkant, in de Oudheid werden kwadraten altijd door vierkanten voorgesteld. En (vierkants)wortels zijn de lengten van de zijden van een vierkant. Heel lang kon daar alleen meetkundig mee worden gemanipuleerd, want in de Oudheid waren de enige getallen 1, 2, 3, ... en de verhoudingen van die getallen (breuken dus). En daarmee was bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ geen getal, kon alleen worden benaderd met getallen. Hetzelfde gold voor kubussen (derde machten zouden wij zeggen) en kubische wortels (derdemachts wortels). Maar heel af en toe waren dat getallen, meestal niet. Toch werd met dergelijke machten gewerkt, maar steeds als vierkant of kubus. Ook gewone getallen (meetbare getallen) waren eigenlijk concrete lengtes net als wortels en π (onmeetbare getallen). Tot ruim voorbij de Middeleeuwen werd op die manier over getallen gedacht.

Vergelijkingen werden geformuleerd in termen van 'een vierkant en een lengte zijn samen 90, hoe groot is die lengte?' Nu noteer je dat als $x^2 + x = 90$ en dan wil je weten hoe groot x is. Na de Griekse wiskundige **Diophantos** hielden vooral geleerden uit het grote Islamitische Rijk dat van 622 tot 1450 het Midden-Oosten domineerde zich met het oplossen van kwadratische vergelijkingen bezig. De wiskundige **Al-Khwarizmi** bedacht de abc-formule, hoewel hij totaal andere notaties gebruikte.

Pas veel later ontstonden in West-Europa de moderne notaties zoals de gewoonte om letters te gebruiken voor variabelen en het wortelteken. Ook werd het getalbegrip verruimd, zodat alle wortels als getallen werden opgevat.

Figuur 1

Testen

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 10 - 2(x-1)^5$.

a Laat zien hoe de grafiek van f kan ontstaan uit de grafiek van $y = x^5$.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de beide assen. Rond indien nodig af op twee decimalen.

c Los algebraïsch op: $f(x) = 496$.

d Los algebraïsch op: $f(x) > 8$.

Opgave 2

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $-0{,}5(x-2)^4 + 45 \leq 4{,}5$

b $x(x-2) = 3x - 6$

c $x^3 - 4x^2 = 10x$

d $6 - 0{,}1(x-3)^{\frac{1}{3}} = 5$

e $\frac{1}{4}x^2 \geq x + 5$

f $\frac{4}{x^3} - 6 < 14$

Opgave 3

Een bedrijf gebruikt voor de winst die het per maand maakt de formule $W = -q^3 + 10q^2 + 14q - 20$. Hierbij is q de productie in honderdtallen en W de winst in honderden euro.

a Hoe groot is de winst als er 150 producten worden gemaakt?

b Bij welke laagste productie wordt er € 10862,50 winst gemaakt?

c Hoe groot is de maximale winst?

Opgave 4

Een kalkoen braden is lastig, omdat het enige tijd duurt voordat ook het binnenste van de kalkoen op temperatuur komt. Hoe lang dat duurt hangt af van het gewicht. Het is de kunst om de kalkoen zo lang te braden dat het binnenste net gaar is. Je kunt dat niet controleren zonder de kalkoen aan te snijden. De optimale braadtijd is daarom moeilijk vast te stellen. Gelukkig geven kookboeken vaak aanwijzingen voor de braadtijd, die afhankelijk is van het gewicht van de kalkoen. Onderzoekers hebben vastgesteld dat met de volgende formule het beste resultaat wordt verkregen: $t = 11g^{\frac{2}{3}}$ Hierin is g het gewicht van de kalkoen in kilogram en t de tijd in minuten die nodig is om het binnenste van de kalkoen op een temperatuur van 85 °C te brengen.

a Bereken hoe lang het bij een kalkoen van 3 kg duurt voor het binnenste op een temperatuur van 85 °C is. Verwacht je dat een kalkoen van 6 kg daarvoor twee keer zoveel tijd nodig heeft?

Als het binnenste van de kalkoen een temperatuur heeft van 85 °C duurt het nog een tijd voordat de kalkoen gaar is. Ga ervan uit dat die tijd 80 minuten is en dat die tijd niet afhangt van het gewicht van de kalkoen.

b Geef de formule voor de totale braadtijd T van een kalkoen afhankelijk van het gewicht. Is de totale braadtijd recht evenredig met een macht van het gewicht?

c Verklaar waarom het minder moeilijk is om kooktijden vast te stellen dan braadtijden. Is de kooktijd van bijvoorbeeld aardappels ook afhankelijk van het gewicht? En de totale tijd dat aardappels op het fornuis moeten staan?

Opgave 5

Een farmaceutisch bedrijf heeft een nieuw medicijn ontwikkeld tegen migraine. Het product komt in tabletvorm op de markt. Uit onderzoek is gebleken dat in West-Europa per dag gemiddeld 50000 mensen aan migraine lijden. Het bedrijf wil nu deze mensen helpen, maar vooral ook winst maken op het medicijn. Het medicijn zal worden verkocht in doosjes met 20 tabletten. Het aantal per dag verkochte doosjes wordt benaderd door de formule: $q = 10000 - 3000p$ waarin p de prijs in euro per doosje is.

a Welke formule kun je opstellen voor het verkoopresultaat V per dag afhankelijk van de prijs p?

b De fabrikant is geïnteresseerd in de inkomsten. Van een doosje verkochte tabletten gaat 84% van de opbrengst naar de tussenhandel en 16% naar de fabrikant. Welke formule geldt voor het resultaat R voor de fabrikant?

c De productiekosten bedragen € 870 per dag en € 0,09 per doosje. Welke formule geldt voor de productiekosten K als functie van p?

d Stel een formule op voor de winst W van de fabrikant.

e Bij welke prijs maakt de fabrikant winst?

f Bij welke prijs is zijn winst zo groot mogelijk?

Toepassen

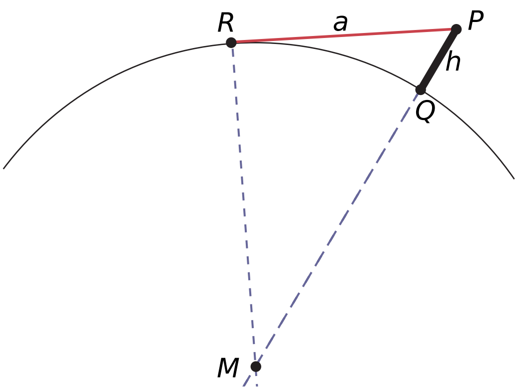
Opgave 6: Kijkafstand

De formule voor de kijkafstand uit het begin van het onderwerp ‘Machtsfuncties’ kun je heel goed zelf afleiden.

Neem eens aan dat de aarde een zuivere bol is met een omtrek van 40000 km. De hoogte h (in m) is de afstand van je ogen tot het aardoppervlak. In de tekening zie je hoe dat er dan in doorsnede uit ziet. De kijkafstand a (in m) is dan de lengte van PR (eigenlijk van de boog QR maar dat verschilt niet veel van elkaar).

Omdat h^2 heel veel kleiner is dan $12732400h$ kun je h^2 verwaarlozen. Je vindt dan $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

De kijkafstand a is dus bij benadering een machtsfunctie van de hoogte h die je ogen boven het aardoppervlak zitten.



Figuur 2

a Hoe kun je nu a berekenen? Maak zo een formule voor a afhankelijk van h.

b Laat zien dat ongeveer geldt $a \approx 3568\sqrt{h} = 3568h^{\frac{1}{2}}$.

c De gevonden formule is iets anders dan die aan het begin van het onderwerp ‘Machtsfuncties’. Hoe zou dat kunnen komen?

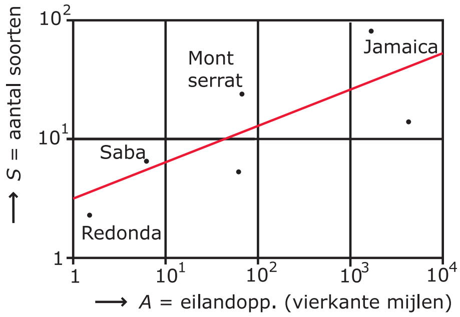
d Je kunt zo ook een formule afleiden voor de kijkafstand op de maan. Zoek de daarvoor benodigde gegevens op en leidt die formule af.

e Kun je op de maan verder of minder ver kijken dan op Aarde?

Examen

Opgave 7: Diersoorten

Het lijkt aannemelijk dat er een verband bestaat tussen de oppervlakte van een gebied en het aantal verschillende diersoorten dat in dat gebied voorkomt. Een theorie hierover stelt dat het aantal verschillende diersoorten op een eiland in een bepaalde klimaatzone alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland. In deze opgave kijken we naar de verschillende soorten reptielen op eilanden in het Caraïbisch gebied. Onderzoekers telden op vele eilanden het aantal verschillende soorten reptielen (S). In de volgende figuur zijn de gegevens van enkele eilanden weergegeven.



Figuur 3

Volgens de theorie is het verband tussen de oppervlakte A van een eiland (in vierkante mijlen) en het aantal soorten reptielen (S) op dat eiland te beschrijven met de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$. De lijn in de bovenstaande figuur is de grafiek die bij deze formule behoort.

a Op het eiland Jamaica zijn meer soorten reptielen aangetroffen dan op grond van de theorie (de formule) verwacht mag worden. Hoeveel soorten reptielen zou een even groot eiland volgens de theorie hebben? Licht je antwoord toe.

b Binnen de theorie geldt als ruwe regel: ‘Bij een 10 keer zo groot eiland vinden we 2 keer zoveel diersoorten.’ Laat zien dat dit uit de formule volgt.

c Op een groot eiland worden veel verschillende soorten reptielen met uitsterven bedreigd. Men wil maatregelen nemen om de natuur te beschermen. Daarbij moet er een keuze worden gemaakt uit twee mogelijkheden:

- Oprichting van 1 groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijlen.
- Oprichting van 2 kleinere reservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen. Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd in de bewoonde wereld en kunnen als ‘eilanden’ beschouwd worden.

Voor het schatten van het aantal soorten reptielen dat in zo’n reservaat zal voorkomen kan de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ gebruikt worden. Of voor 1 of 2 reservaten gekozen wordt, is mede afhankelijk van het aantal soorten dat de twee kleinere reservaten gemeen zullen hebben. Men neemt aan dat er 8 soorten reptielen zijn die zowel in het éne als het andere kleine reservaat zullen voorkomen. Men wil de mogelijkheden kiezen waarbij in totaal zoveel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

Welke van de twee mogelijkheden zal men kiezen? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1993, eerste tijdvak)

Opgave 8: Houtindustrie

Een deel van de bossen in Nederland is bestemd voor de houtindustrie. Voordat een bos wordt gekapt, onderzoekt men meestal eerst hoeveel m^3 hout het bos op zal leveren. Dit gebeurt aan de hand van de diameter en de hoogte van bomen. De diameter van een boom wordt gemeten op een vaste hoogte.

Voor het bepalen van de hoeveelheid hout in één boom wordt gebruikgemaakt van de volgende formule: $V = f \cdot d^2 \cdot h$ met diameter d en hoogte h (beide in meters). In deze formule is V het volume aan hout in de boom in m^3. De factor f heet de vormfactor. De vormfactor is een getal dat afhangt van de soort boom en de diameter d van de boom. Een voorbeeld van een boom die gebruikt wordt in de houtindustrie is de grove den (Pinus sylvestris). Zie de afbeelding.

Figuur 4

Voor de grove den wordt het verband tussen de vormfactor f en de diameter d (m) bij benadering gegeven door de volgende formule: $f = 0{,}30 \cdot d^2 - 0{,}36 \cdot d + 0{,}46$

In een bos staat een grove den met een diameter van 0,16 m.

a Bereken hoeveel procent de vormfactor van deze boom afneemt als de diameter van deze boom met 100% toeneemt.

De grootste bekende diameter van een grove den is 1,2 m. Naarmate de diameter van een grove den groter is, is de hoogte ook groter. Voor de grove den geldt bij benadering het volgende verband tussen de hoogte h en de diameter d: $h = 44 \cdot d^{0{,}65}$. Ook hier zijn de diameter en de hoogte in meters.

b Een grove den van 40 m hoog wordt gekapt. Bereken hoeveel hout deze grove den volgens de formules bevat.

Op basis van de formule $f = 0{,}30 \cdot d^2 - 0{,}36 \cdot d + 0{,}46$ en de formule $h = 44 \cdot d^{0{,}65}$ kan de formule $V = f \cdot d^2 \cdot h$ worden geschreven als $V = a \cdot d^{4{,}65} + b \cdot d^{3{,}65} + c \cdot d^{2{,}65}$. Hierin zijn a, b en c constanten.

c Toon aan dat V inderdaad geschreven kan worden als $V = a \cdot d^{4{,}65} + b \cdot d^{3{,}65} + c \cdot d^{2{,}65}$ en bereken a, b en c in twee decimalen nauwkeurig.

(naar: vwo examen wiskunde A in 2011, eerste tijdvak)

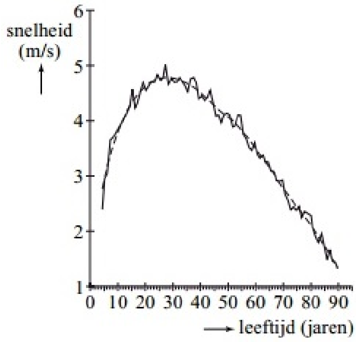
Opgave 9: Marathon

De Olympische hardloopwedstrijd met de grootste lengte is de marathon: ruim 42 km, om precies te zijn 42195 m. De marathon wordt zowel door mannen als door vrouwen gelopen. In deze opgave concentreren we ons op de marathonloopsters. De prestatie van een loopster geeft men in krantenberichten meestal weer door de tijd waarin de marathon is afgelegd, maar een even duidelijke maat is de gemiddelde snelheid over het gehele parcours. Dit noemen we kortweg de snelheid. Deze snelheid wordt uitgedrukt in m/s (meters per seconde). Een marathonloopster legt de marathon af in 2 uur, 43 minuten en 32 seconden.

a Bereken haar snelheid in m/s.

Elmer Sterken van de Rijksuniversiteit Groningen heeft onderzoek gedaan naar het verband tussen de snelheid van Amerikaanse marathonloopsters en hun leeftijden.

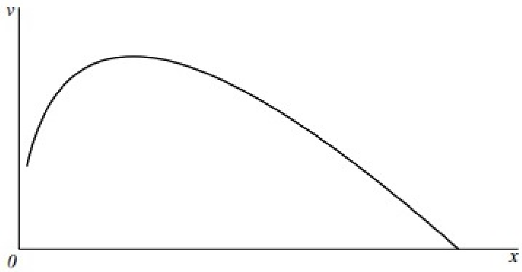
Je ziet een figuur uit het rapport dat hij daarover geschreven heeft. In deze figuur is voor iedere leeftijd weergegeven: 'de hoogste snelheid ooit gelopen door een Amerikaanse' (zie de zigzaglijn). De geregistreerde leeftijden lopen van 6 tot en met 90 jaar.



Figuur 5

De 'zigzaglijn' in de figuur is benaderd door de grafiek met de formule:
$v = 2{,}836 \cdot x^{0{,}665} - 1{,}390 \cdot x^{0{,}818}$.
Hierin is v de hoogste snelheid in m/s van marathonloopsters met een leeftijd van x jaar. In de tweede figuur is de grafiek van v weergegeven.

In het vervolg van deze opgave beschouwen we deze laatste grafiek en de formule voor v als een wiskundig model van de werkelijkheid.
Petra loopt vaker een marathon en hoopt binnenkort de marathon binnen 3 uur te volbrengen. Petra is 52 jaar.



Figuur 6

b Kan een 52-jarige marathonloopster volgens dit model de marathon binnen 3 uur lopen? Licht je antwoord toe.

c De grafiek van v heeft een maximum. Volgens het model is er dus blijkbaar een leeftijd waarop marathonloopsters (gemiddeld) het beste presteren. Onderzoek op welke leeftijd de prestatie het beste zou moeten zijn.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2010, eerste tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.