5.4 De abc-formule

Inleiding

In het vorige onderdeel heb je gezien hoe je de vergelijking $2(x-1)^2 - 5 = 3$ oplost door terug te rekenen. Dat terugrekenen lukt, omdat de x maar op één plaats in de vergelijking voorkomt. Kwadratische vergelijkingen komen ook voor in een vorm waarin terugrekenen niet mogelijk is. Werk je namelijk de haakjes weg, dan krijg je $2x^2 - 4x - 3 = 3$. De x komt nu op meer plekken voor en terugrekenen is niet meer mogelijk. Door kwadraatafsplitsen kun je ook een formule afleiden waarmee een dergelijke vergelijking in één keer op te lossen is. Dat is de zogenaamde abc-formule.

Je leert in dit onderwerp

- nagaan hoeveel oplossingen een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heeft;
- kwadratische vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen.

Voorkennis

- werken met kwadratische functies;
- kwadratische vergelijkingen van de vorm $a(x-p)^2 + q = u$ oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is de functie $g(x) = 2(x+1)^2 + 7$.

a Schrijf het functievoorschrift van g in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$.

b Hoe kun je met de grafische rekenmachine nagaan of je dit goed hebt gedaan?

c Hoe kun je aan een functievoorschrift van de vorm g in de vorm $g(x) = ax^2+bx+c$ zien of de grafiek een dal- of een bergparabool is?

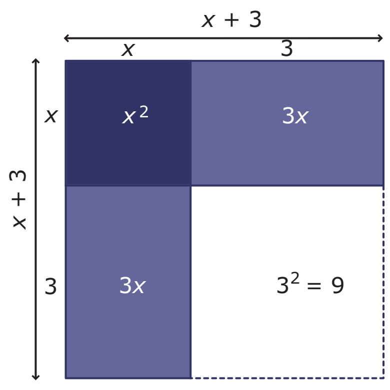
d Hoe bepaal je de top van de grafiek van g?

Uitleg 1

De vergelijking $x^2 + 6x = 16$ kun je niet oplossen door terugrekenen. Maar in de figuur zie je dat $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 3^2$.

Dit betekent dat je de gegeven vergelijking kunt schrijven als: $(x+3)^2 - 9 = 16$. En nu komt x weer op één plek voor en kun je terugrekenen:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 9 &= 16\\ (x+3)^2 &= 25\\ x+3 &= -5 \vee x+3 = 5\\ x &= -8 \vee x = 2\end{aligned}$$



Figuur 1

In het algemeen is $x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$.

Je noemt dit kwadraat afsplitsen. De geldigheid van deze formule is eenvoudig aan te tonen door de haakjes weg te werken.

Opgave 1

Bij een kwadratisch verband hoort de formule $y = x^2 - 6x + 1$.

a Laat zien dat je de formule kunt schrijven als $y = (x - 3)^2 - 8$.

b Welke coördinaten heeft de top van de grafiek bij dit kwadratisch verband?

c Bereken algebraïsch de snijpunten van deze grafiek met de x-as in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Los de vergelijkingen op met behulp van kwadraat afsplitsen.

a $x^2 + 4x = 5$

b $x^2 - 8x = 9$

c $2x^2 - 12x = 54$

Uitleg 2

De techniek van kwadraat afsplitsen kun je ook toepassen om bijvoorbeeld de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op te lossen. Je deelt dan eerst door 3. Omdat dit tijdrovend kan zijn, hebben wiskundigen de oplossingen berekend voor het algemene geval. Dat gaat ook met kwadraat afsplitsen.

De vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ heeft als oplossing:

$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Dit noem je de abc-formule of wortelformule. Deze formule geeft meteen de twee oplossingen als je de juiste waarden voor a, b en c invult. De vergelijking moet vaak wel eerst nog in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ worden gezet.

Als je bijvoorbeeld $3x^2 + 17x = 45$ wilt oplossen, ga je eerst op 0 herleiden.
Je krijgt dan $3x^2 + 17x - 45 = 0$.

Nu lees je af: $a = 3$, $b = 17$ en $c = -45$.

Invullen in de abc-formule geeft: $x = \frac{-17+\sqrt{829}}{6} \vee x = \frac{-17-\sqrt{829}}{6}$.

Afgerond worden de oplossingen: $x \approx 1{,}97 \vee x \approx -7{,}63$.

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ onder het wortelteken heet de discriminant. Omdat die discriminant in dit geval 829 is, zijn er twee mogelijke antwoorden. Is de discriminant negatief, dan zijn er geen reële oplossingen. Je kunt die discriminant beter eerst uitrekenen.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je de abc-formule kunt gebruiken om een kwadratische vergelijking op te lossen.

a Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met behulp van de abc-formule.

b Los de vergelijking $x^2 - 6x + 1 = 0$ op met behulp van de abc-formule.

c Los de vergelijking $3x^2 + 17x = 45$ op met kwadraat afsplitsen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Een algemene vorm voor een **kwadratische functie** is $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Aan dit functievoorschrift zie je niet meteen hoe hij uit de machtsfunctie $y = x^2$ kan ontstaan. Dat is lastig als je de top en de snijpunten met de x-as van de bijbehorende parabool wilt vinden.

Wiskundigen hebben al lang geleden de **abc-formule** afgeleid. Daarmee kun je de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen en zo de nulpunten (en de snijpunten met de x-as) van de kwadratische functie berekenen. De gevonden oplossing is: $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

De uitdrukking $D = b^2 - 4ac$, die onder het wortelteken staat, heet de **discriminant** van de kwadratische vergelijking. Omdat alleen de wortel uit een positief getal of 0 een reëel getal oplevert, bepaalt die discriminant het aantal oplossingen van de vergelijking:

- $D > 0$: er zijn twee oplossingen;
- $D = 0$: er is één oplossing (twee dezelfde);
- $D < 0$: er zijn geen reële oplossingen.

Omdat de symmetrieas van de parabool een x-waarde heeft die midden tussen beide nulpunten in zit, is de x-waarde van de top uit deze nulpunten af te leiden.

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op: $x^2 + 10x = 15$. Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Je kunt hier de abc-formule toepassen.
Eerst schrijf je de vergelijking als: $x^2 + 10x - 15 = 0$.
Dan neem je $a = 1$, $b = 10$ en $c = -15$.
Discriminant: $D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15 = 160$.
De discriminant is positief, dus er zijn twee oplossingen:

$x = \frac{-10+\sqrt{160}}{2} \vee x = \frac{-10-\sqrt{160}}{2}$

In twee decimalen nauwkeurig: $x \approx 1{,}32 \vee x \approx -11{,}32$.

Opgave 4

Bestudeer **Voorbeeld 1**. Los de volgende vergelijkingen op met behulp van de abc-formule. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^2 - 12x = 30$

b $x^2 + 3x = 16$

c $x^2 = 5 - 2x$

d $5x^2 = 1 + 2x^2 + 6x$

Opgave 5

Kwadratische vergelijkingen kunnen soms ook opgelost worden door ontbinden in factoren. Ga bij elk van de volgende vergelijkingen na of ze opgelost kunnen worden met ontbinden in factoren. Bereken van elk van de vergelijkingen de oplossing. Gebruik de abc-formule alleen als dat echt nodig is.

a $x^2 - x - 3 = 0$

b $-4x^2 + 5x - 14 = 0$

c $2x^2 - 10x + 10 = 2x - 6$

d $x - 5x^2 = 10$

e $x(x - 7) = 8$

Voorbeeld 2

Bepaal algebraïsch de snijpunten met de x-as van de functie $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ en bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende grafiek.

Antwoord

Je kunt dit uitrekenen met de abc-formule: $2x^2 - 2x - 4 = 0$. Maar het gaat sneller door ontbinden in factoren toe te passen. Je vindt dat $x = -1 \vee x = 2$. Dus de snijpunten met de x-as zijn $(-1,0)$ en $(2,0)$.

De top van de grafiek vind je nu door te bedenken dat de symmetrieas door het punt midden tussen $(-1,0)$ en $(2,0)$ gaat. Dus geldt voor de x-waarde van de top: $x = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5$.

De top is het punt $(0{,}5; -4{,}5)$.

Opgave 6

In het voorbeeld wordt de vergelijking $2x^2 - 2x - 4 = 0$ opgelost.

a Laat zien hoe dit met de abc-formule gaat.

b Los de vergelijking ook op door ontbinden in factoren.

Opgave 7

Bekijk de kwadratische functie $y = 2x^2 - 6x + 2$. Je wilt de snijpunten met de x-as (in twee decimalen nauwkeurig) en de top van de grafiek bepalen.

a Welke vergelijking moet je oplossen om de snijpunten met de x-as te berekenen?

b Je kunt deze vergelijking met de abc-formule oplossen. Bepaal wat dan de a, b en c zijn. Bereken daarna de discriminant.

c Kun je aan de discriminant zien hoeveel snijpunten met de x-as deze functie heeft?

d Los de vergelijking verder op en bereken de snijpunten met de x-as in twee decimalen nauwkeurig.

e Nu kun je vanuit de snijpunten met de x-as de top bepalen. Hoe gaat dat in zijn werk?

Voorbeeld 3

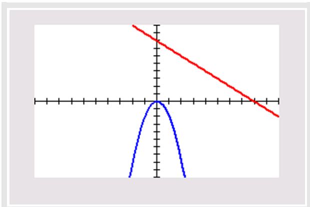
Los op: $-2x^2 < 8 - x$.

Antwoord

De bijbehorende vergelijking herleid je eerst tot: $-2x^2 + x - 8 = 0$. Je ziet dan dat: $a = -2$, $b = 1$ en $c = -8$. Discriminant $D = b^2 - 4ac = -63$. De discriminant is negatief, dus de vergelijking heeft geen oplossingen.

Nu bekijk je de grafieken van $y_1 = -2x^2$ en $y_2 = 8 - x$. Dan zie je meteen dat er geen snijpunten zijn: y_1 is voor elke x kleiner dan y_2.

Antwoord: voor elke x-waarde geldt dat $-2x^2 < 8 - x$.



Figuur 2

Opgave 8

Je wilt de ongelijkheid $3x^2 + 6x < x + 8$ oplossen. Bekijk **Voorbeeld 3**.

a Los de bij de ongelijkheid horende vergelijking $3x^2 + 6x = x + 8$ op met de abc-formule.

b Controleer de oplossingen met de grafische rekenmachine en geef de oplossing van de ongelijkheid.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de kwadratische functie f met $f(x) = x^2 + 8x - 20$.

a Bereken de snijpunten van de grafiek van f met de x-as en de y-as.

b Bereken het minimum van f.

Opgave 10

Teken met de grafische rekenmachine in één figuur de grafieken van $f(x) = 2x^2 - x + 1$ en $g(x) = 10 - 3x$.

a Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

b Los in drie decimalen nauwkeurig op: $f(x) > g(x)$

Opgave 11

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{1}{3}x^2 + 10x + 1 = 0$

b $2x^2 - 5x = x$

c $x^2 - 5x + 10 = 0$

d $x(x - 1) = 12$

e $5 - \frac{1}{3}x^2 = 1$

Opgave 12

Los de ongelijkheden algebraïsch op. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^2 - x < x + 1$

b $x^2 - 2x > x + 3$

Opgave 13

Een korfballer scoort door een bal van bovenaf door een ronde korf te gooien. De baan die het zwaartepunt van deze bal aflegt, is gegeven door de formule $h = -0{,}125x^2 + x + 2{,}5$. h is de hoogte van de bal boven de grond en x is de horizontale afstand (gemeten over de vloer) van deze korfballer tot het punt recht onder het zwaartepunt van de bal is, beide in meters. De korf hangt op 3,5 m hoogte.

a Op welke hoogte laat de speler de bal los?

Op het moment dat deze speler scoort, is het zwaartepunt van de bal precies 3,5 m boven de grond in het midden van de bovenrand van de korf.

b Hoeveel meter staat deze speler voor het midden van de korf? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Hoeveel zit het hoogste punt van de baan van het zwaartepunt van de bal boven de grond?

Toepassen

In de micro-economie wordt het volgende **rekenmodel voor de winst van de verkoop van een bepaald product** gehanteerd als het bedrijf de enige aanbieder is.

Het aantal verkochte producten hangt alleen af van de prijs p in euro per stuk. Hoe hoger de prijs, hoe lager de hoeveelheid q die van dit product wordt verkocht per tijdseenheid. Bijvoorbeeld kan per week gelden $q = 400 - 2{,}5p$.

De inkoopkosten hangen weer af van de prijs per eenheid en de voorraadkosten. Bijvoorbeeld kan een eenheid product € 6,= kosten en de voorraadkosten kunnen € 1500,= per week zijn.

Voor de opbrengst — als wekelijks de hele voorraad wordt verkocht — geldt $TO = p \cdot q$, de wekelijkse kosten noem je TK en de winst is $TW = TO - TK$.

Opgave 14

Bekijk het rekenmodel voor het bepalen van de winst bij de verkoop van een bepaald product in **Toepassen**.

a Waarom is $TO = p \cdot q$?

b Welke waarden kunnen p en q aannemen?

c Stel een formule op voor TW als functie van de prijs p.

De winst is in dit rekenmodel een kwadratische functie van p.

d Bereken de maximale winst.

e Bij welke laagste prijs bedraagt de winst meer dan € 10.000?

Opgave 15

In de voorgaande opgave heb je een formule opgesteld voor de winst TW afhankelijk van de prijs p per eenheid product.

a Stel een formule op voor TW als functie van de verkochte hoeveelheid q.

b Bereken de maximale winst.

c Bij welke hoeveelheden verkocht product wordt nog verlies geleden?

Testen

Opgave 16

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a $x^2 - 2x - 15 = 0$

b $-x^2 - x - 1 = 0$

c $20 - x^2 = 11$

d $x(x+2) < 14$

e $x^2 - x + 10 \geq 3$

Opgave 17

Een door een tenniskanon afgeschoten tennisbal legt een baan af met (bij benadering) de vorm van een parabool. Hierbij hoort de formule $h = -0{,}015x^2 + 0{,}3x + 0{,}5$. Daarbij is h (in meters) de hoogte boven de grond, en x (in meters) de horizontale afstand van de bal tot het tenniskanon.

a Op welke hoogte wordt de tennisbal afgeschoten?

b Bereken in één decimaal nauwkeurig na hoeveel meter de bal op de grond komt.

c Bereken algebraïsch de waarden van x waar de tennisbal zich hoger dan 1,5 m boven de grond bevindt. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van kwadratische vergelijkingen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.