5.3 Kwadratische functies

Inleiding

Je gaat nu dieper in op de eigenschappen van machtsfuncties met een exponent 2, kwadraten dus. Kwadratische functies zijn functies waarvan de grafieken kunnen ontstaan door verschuiving en herschaling van de grafiek van $y = x^2$. De grafieken van kwadratische functies zijn parabolen. De eigenschappen van die kwadratische functies kun je gebruiken om kwadratische vergelijkingen op te lossen en om formules bij gegeven parabolen op te stellen.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de eigenschappen van een kwadratische functie afleiden uit het functievoorschrift;
- kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden oplossen;
- een passend functievoorschrift opstellen bij een parabool (de grafiek van een kwadratische functie).

Voorkennis

- algebraïsch vergelijkingen oplossen;
- verschuivingen en herschalingen van grafieken toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet al van alles over kwadratische functies.

a Wat zijn de oplossingen van de vergelijking $x^2 = 20$?

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = -1$?

c Heeft de ongelijkheid $x^2 > -1$ oplossingen? Zo ja, welke?

d Heeft elke kwadratische vergelijking oplossingen? Hoeveel oplossingen kunnen er zijn?

e Wat weet je allemaal van een kwadratische functie? Maak een overzicht.

Uitleg

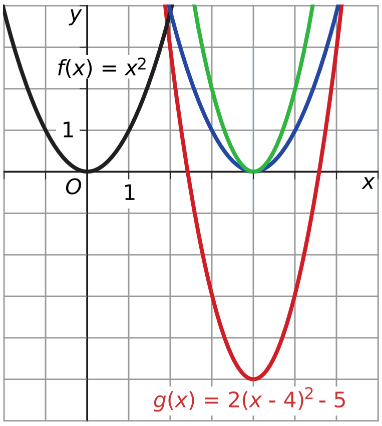
Bekijk de applet

De standaardfunctie van alle kwadratische functies is de functie $y = x^2$. Alle andere kwadratische functies kunnen daaruit door verschuiving en/of herschaling worden verkregen. Ze hebben daarom de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.

Kies je bijvoorbeeld $a = 2$, $p = 4$ en $q = -5$ dan krijg je de functie $y = 2(x-4)^2 - 5$, waarvan de grafiek uit die van f verkregen kan worden door:

- een verschuiving in de x-richting van 4 (dus 4 naar rechts);
- herschalen in de y-richting met factor 2 (de y-waarden vermenigvuldigen met 2);
- een verschuiving in de y-richting van -5 (dus 5 naar beneden).

De grafiek van g is een dalparabool met top $(4, -5)$ en symmetrieas $x = 4$. De twee snijpunten met de x-as bereken je door de vergelijking $2(x-4)^2 - 5 = 0$ op te lossen.



Figuur 2

Neem je $a = -2$, dan wordt het functievoorschrift $y = -2(x-4)^2 - 5$. De grafiek is dan een bergparabool, omdat vermenigvuldiging met een negatief getal een spiegeling in de x-as betekent.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de functie $y = -2(x-4)^2 - 5$.

a Heeft deze functie een minimum of een maximum? Hoe kun je dat aan het functievoorschrift zien?

b Snijdt de grafiek van de functie de x-as?

c Los op: $y = -7$

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 4$.

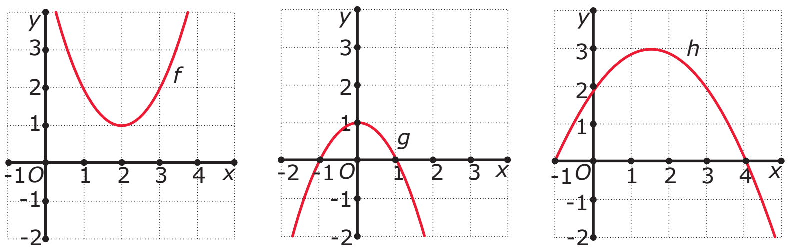
a Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$?

b Is hier sprake van een minimum of een maximum? Hoe kun je dat aan het functievoorschrift zien?

c Los algebraïsch op: $f(x) < 100$.

Opgave 3

Je ziet drie parabolen. Geef het bijbehorende functievoorschrift.



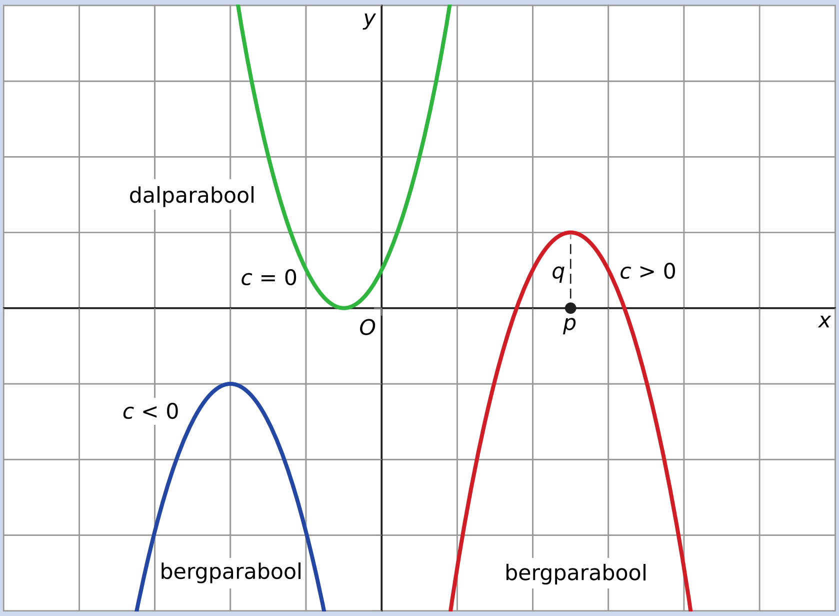
Figuur 3

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

Een functie van de vorm $y = a(x-p)^2 + q$, noem je een **kwadratische functie** (als $a \neq 0$). De grafiek van elke kwadratische functie ontstaat door verschuiven en herschalen van de grafiek van $y = x^2$. De grafiek van elke kwadratische functie is een **parabool** met **top** (p,q) en **symmetrieas** $x = p$. Als $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool**. Als $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.



Figuur 4

De **kwadratische vergelijking** $a(x-p)^2 + q = u$ kun je herschrijven tot: $(x-p)^2 = c$.

- Als $c > 0$ zijn er twee oplossingen.
- Als $c = 0$ is er één oplossing.
- Als $c < 0$ zijn er geen oplossingen.

Je vindt die oplossingen door worteltrekken.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

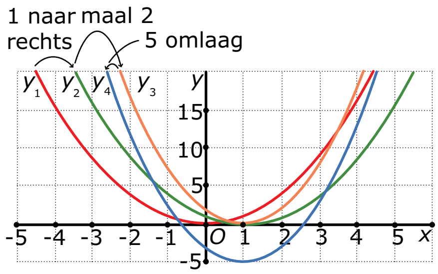
Gegeven is de kwadratische functie $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$. Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = x^2$? Bepaal ook de top en de symmetrieas van deze grafiek.

Antwoord

Ga na dat de grafiek van f ontstaat uit $y = x^2$ (rood) door:

- 1 eenheid in de x-richting te verschuiven (groen);
- met factor 2 te herschalen in de y-richting (oranje);
- met -5 in de y-richting te verschuiven (blauw).

De grafiek is een dalparabool met top $(1, -5)$. De coördinaten van die top zijn direct uit het functievoorschrift af te lezen. De symmetrieas is de lijn $x = 1$.



Figuur 5

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven is de functie $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$.

a Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit de grafiek $y = x^2$?

b Bepaal de uiterste waarde van f.

c Welke symmetrieas heeft de grafiek van f?

Opgave 5

Als je de grafiek van $y = x^2$ verschuift en in de y-richting herschaalt, krijg je een grafiek waarbij een formule hoort van de vorm: $y = a(x-p)^2 + q$

a Hoe kun je aan de formule zien of de grafiek een bergparabool of een dalparabool is? Geeft dit ook aan of de grafiek een maximum of minimum heeft?

b Hoe kun je aan de formule zien op welke hoogte het maximum of minimum ligt?

c Hoe kun je aan de formule zien welke waarde van x je in moet vullen om het maximum of minimum te krijgen?

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $2(x-1)^2 - 5 = 3$ op.

Antwoord

Deze vergelijking los je systematisch op:

$$\begin{aligned} 2(x-1)^2 - 5 &= 3 \\ 2(x-1)^2 &= 8 \\ (x-1)^2 &= 4 \\ x - 1 &= -\sqrt{4} \vee x - 1 = \sqrt{4} \\ x &= 1 - 2 \vee x = 1 + 2 \end{aligned}$$

Je vindt: $x = -1 \vee x = 3$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Hoe kun je aan de formule $y = 2(x-1)^2 - 5$ zien dat de vergelijking $2(x-1)^2 - 5 = 3$ twee oplossingen heeft?

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-2(x-3)^2 + 5 = 18$? Licht je antwoord toe.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-2(x-3)^2 + 5 = 0$? Licht je antwoord toe.

d Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-2(x-3)^2 + 5 = 5$?

Opgave 7

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Laat eventuele wortels staan.

a $x^2 = 100$

b $(x-4)^2 = 64$

c $-3(x+1)^2 = -75$

d $3(x+2)^2 - 3 = 27$

e $2x^2 - 7 = 0$

Voorbeeld 3

Los de ongelijkheid $-5(x+3)^2 - 17 \geq -47$ op.

Antwoord

Los de bij de ongelijkheid horende vergelijking systematisch op.

$$\begin{aligned} -5(x+3)^2 - 17 &= -47 && \text{beide zijden } +17 \\ -5(x+3)^2 &= -30 && \text{beide zijden } /-5 \\ (x+3)^2 &= 6 && \text{beide zijden worteltrekken} \\ x+3 &= \sqrt{6} \vee x+3 = -\sqrt{6} && \text{beide zijden } -3 \\ x &= -3+\sqrt{6} \vee x = -3-\sqrt{6} \end{aligned}$$

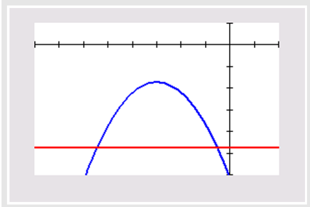
Gebruik de grafische rekenmachine om de ongelijkheid op te lossen.

Voer in: Y1=-5(X+3)^2-17 en Y2=-47.

Venster bijvoorbeeld: $-8 \leq x \leq 3$ en $-60 \leq y \leq 10$.

De grafiek van $y = -5(x+3)^2 - 17$ is een bergparabool met top $(-3, -17)$.
Je kunt de oplossing van de ongelijkheid aflezen. Zie de grafiek.

Je vindt: $-3-\sqrt{6} \leq x \leq -3+\sqrt{6}$.



Figuur 6

Opgave 8

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a $(x-4)^2 < 10$

b $-2(x+3)^2 + 10 < 4$

c $3(x-5)^2 - 2 \geq 10$

Verwerken

Opgave 9

De grafiek van de functie $f(x) = 2(x+8)^2 - 8$ ontstaat door verschuiving en herschaling van de grafiek van $y = x^2$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $y = x^2$?

b Verander de volgorde van de herschaling en de laatste verschuiving. Waarom is de volgorde van deze veranderingen belangrijk?

Opgave 10

Bekijk de grafiek van $f(x) = 0{,}5(x+3)^2 - 5$.

a Geef de extreme waarde (het maximum of het minimum) van f en de waarde van x waarvoor je deze extreme waarde krijgt.

b Los de vergelijking $0{,}5(x+3)^2 - 5 = 5$ op.

c Los op: $f(x) = -5$

d Los op: $f(x) = -10$

e Los op: $f(x) > -3$

f Los op: $f(x) < 0$

g Los op: $f(x) > -10$

Opgave 11

Gegeven is de formule $y = -3(x+2)^2 + 10$.

a Op welk interval is de grafiek met deze formule dalend?

b Bereken de snijpunten van de grafiek met de x-as. Rond af op twee decimalen.

Opgave 12

Los de ongelijkheden exact op.

a $5 - x^2 > -21$

b $-4(x+80)^2 - 40 < -100$

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + c$. Hierin is c een nog onbekende constante.

a Welke extreme waarde heeft deze functie?

b Voor welke waarden van c heeft de functie twee snijpunten met de x-as? Licht je antwoord toe.

c Voor welke waarden van c snijdt de grafiek van f de lijn $y = 4$ niet?

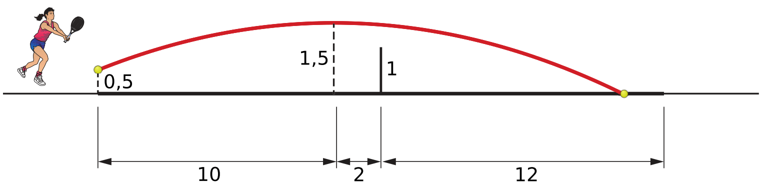
Opgave 14

Een kwadratisch verband heeft een grafiek waarvan de snijpunten met de x-as $A(-3,0)$ en $B(-11,0)$ zijn. De grafiek snijdt de y-as in het punt $C(0,12)$.

Stel een formule op voor dit kwadratisch verband.

Toepassen

Bekijk de applet: Baan van een tennisbal



Figuur 7

Bij een tenniswedstrijd wordt de bal vanaf 0,5 meter boven de baseline in de lengterichting van het veld over het net geslagen. Het hoogste punt van de (ongeveer) **parabolische baan** ligt op 2 meter voor het net en 1,5 meter boven het veld. Het 1 meter hoge net staat in het midden van de lengte van het veld, dat ongeveer 24 meter bedraagt.
Je kunt door berekening aantonen dat de bal ‘in’ is.
Breng daartoe een geschikt assenstelsel aan zoals dat in de figuur is te zien en stel een bijpassende kwadratische formule op voor de baan van de bal.

Opgave 15

De baan van een tennisbal kan worden beschreven met een kwadratische functie.

a De baan is slechts ongeveer parabolisch. Waarom is hij in de praktijk zeer waarschijnlijk niet precies parabolisch?

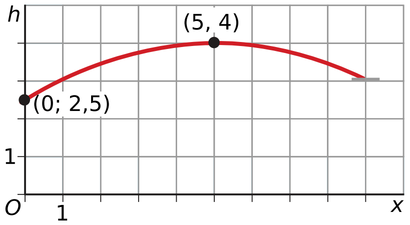
b Omdat de parabool door het punt $(10; 1,5)$ gaat, kun je de baan beschrijven met de formule $h(x) = a(x-10)^2 + 1,5$. Licht dit toe.

c Laat zien dat $a = -0,01$.

d Bereken nu de twee nulpunten van de kwadratische functie die de baan van de tennisbal (ongeveer) beschrijft. Laat zien dat de bal inderdaad 'in' is.

Opgave 16

Een basketballer maakt een driepunter zonder het bord te raken (hij gooit de bal dus in één keer door de ring van de basket). De baan van de bal is een parabool, zie de figuur. Het hoogste punt van de baan is gegeven. De speler laat de bal op 2,5 meter boven de grond los.



Figuur 8

a Stel een formule op voor de functie $h(x)$ die de baan van de bal beschrijft.

b De ring van de basket hangt op 3,05 meter boven de grond. Hoe ver staat de speler van (het midden van) de ring van de basket in cm nauwkeurig?

Testen

Opgave 17

Bepaal bij de functies de top van de grafiek en geef aan of de grafiek een dal- of bergparabool is.

a $f(x) = -2x^2 - 2$

b $g(x) = 100(x-4)^2 + 8$

c $h(x) = -(x+5)^2 - 3$

Opgave 18

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Laat eventuele wortels staan.

a $3(x-5)^2 - 5 = -2$

b $3(x-5)^2 - 5 = -5$

c $-2(x+4)^2 + 3 = 1$

d $2(x+2)^2 > 10$

e $-(x+4)^2 < -3$

Opgave 19

Stel een formule op van een kwadratisch verband waarvan de grafiek door de punten (15,0), (25,0) en (5,30) gaat.