5.2 Machtsfuncties

Inleiding

Bij verbanden van de vorm $y = x^p$ hangt het verloop van de grafiek af van de waarde van p. Voor bijvoorbeeld $p = 2$ krijg je een kwadratische functie met als grafiek een parabool. Deze functie is dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$.
Voor $p = 1$ krijg je een lineaire functie, die stijgend is voor elke waarde van x.
In dit onderdeel zul je zien dat je voor negatieve en gebroken waarden van p machtsfuncties krijgt met weer andere karakteristieken.

Je leert in dit onderwerp

- de invloed van de waarde van de exponent in een machtsfunctie op het verloop van de grafiek kennen;
- het verloop van grafieken van functies die door verschuiving en/of herschalen van machtsfuncties ontstaan;
- vergelijkingen en ongelijkheden met daarin machtsfuncties algebraïsch oplossen.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen met machten oplossen.

Verkennen

Opgave V1

Machtsfuncties hebben de vorm $f(x) = c \cdot x^p$. Je kunt de bijbehorende grafieken bekijken met de grafische rekenmachine. Je kiest dan voor c en voor p getallen.

a Neem nu $c = 1$ en neem voor p een even getal. Welke van deze machtsfuncties hebben een minimum? Wat zijn daar de coördinaten van?

b Neem weer $c = 1$ en neem voor p een oneven getal. Zijn er machtsfuncties waarbij de grafiek overal stijgend is? Zo ja, geef dan voorbeelden.

c Hoe kun je ervoor zorgen dat de machtsfunctie $f(x) = c \cdot x^p$ dalend is voor positieve waarden van x?

Neem nu ook gebroken getallen voor p.

d Welke verschillen zijn er tussen de grafiek bij $p = \frac{1}{2}$ en die bij $p = \frac{1}{3}$?

e Bekijk de grafiek bij $p = \frac{2}{3}$. Wat is er bij $x = 0$ aan de hand?

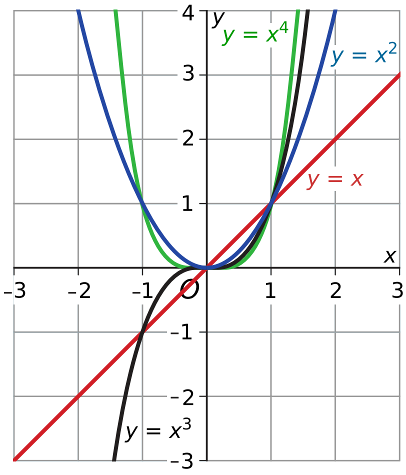
f Als p een niet geheel decimaal getal is, mag je alleen positieve waarden voor x toelaten. Waarom zou dat zijn?

Uitleg 1

Bekijk de applet

Je ziet de grafieken van $y = x^p$ voor enkele positieve gehele waarden van p.

- Als de exponent p een positief even (dus geheel) getal is, geldt dat de grafiek van $y = x^p$:
  - dalend is als $x < 0$;
  - stijgend is als $x > 0$;
  - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$, één oplossing heeft als $a = 0$ en geen oplossingen heeft als $a < 0$.
- Als de exponent p een positief oneven (dus geheel) getal is, geldt dat de grafiek van $y = x^p$:
  - stijgend is voor elke waarde van x (behalve bij $x = 0$);
  - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a.



Figuur 1

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Maak grafieken van de functies: $f(x) = x^4$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$ en $j(x) = x$.

a Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = g(x)$? En $f(x) > g(x)$?

b Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = h(x)$? En $f(x) > h(x)$?

c Voor welke waarden van x geldt: $f(x) = j(x)$? En $f(x) > j(x)$?

Opgave 2

Bekijk de functies $k(x) = x^5$ en $l(x) = x^6$.

a Maak een schets van de grafieken van $k(x)$ en $l(x)$.

b Voor welke waarden van x geldt $x^6 = 10$? Los op: $x^6 < 10$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

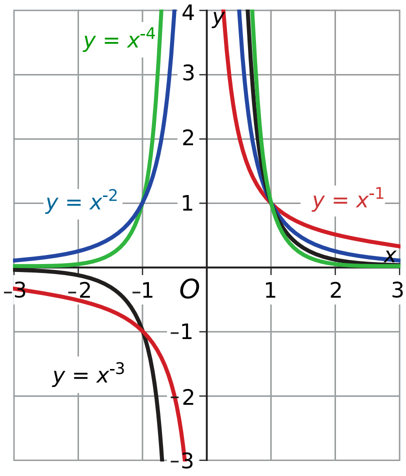
c En voor welke waarde van x geldt $x^5 = 10$? Los op: $x^5 > 10$. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

Bekijk de applet

Je ziet de grafieken van $y = x^p$ voor enkele negatieve gehele waarden van p.

- Als p een negatief even getal is, geldt dat de grafiek van $y = x^p$:
  - stijgend is als $x < 0$;
  - dalend is als $x > 0$;
  - de vergelijking $x^p = a$ twee oplossingen heeft als $a > 0$ en geen oplossingen heeft als $a \leq 0$.
- Als p een negatief oneven getal is, geldt dat de grafiek van $y = x^p$:
  - dalend is voor elke waarde van x (behalve als $x = 0$);
  - de vergelijking $x^p = a$ één oplossing heeft voor elke waarde van a behalve $a = 0$.



Figuur 2

Volgens de eigenschappen van machten en exponenten geldt: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Bij functies van de vorm $y = c \cdot x^{-n} = \frac{c}{x^n}$ is y recht evenredig met x^{-n} en omgekeerd evenredig met x^n.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** de grafieken van de functies: $k(x) = x^{-1}$ en $l(x) = x^{-2}$.

a Welke asymptoten hebben deze functies? En waarom?

b Voor welke waarden van x geldt $k(x) = l(x)$? Los op: $k(x) < l(x)$.

c Los de volgende vergelijkingen op:

- $x^{-1} = 0{,}005$ en $x^{-2} = 0{,}005$
- $x^{-1} = 5000$ en $x^{-2} = 5000$

d Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} < 0{,}005$?

e Voor welke waarden van x geldt $x^{-1} > 5000$?

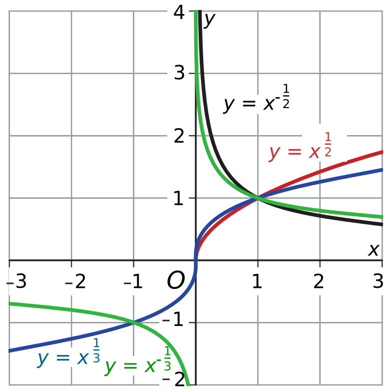
f Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} < 0{,}005$?

g Voor welke waarden van x geldt $x^{-2} > 5000$?

Uitleg 3

Bekijk de applet

Je ziet de grafieken van $y = x^{\frac{1}{p}}$ voor enkele gehele waarden van p.



Figuur 3

- Als $p > 1$ en p even geldt voor $y = x^{\frac{1}{p}}$ dat:
  - het domein $[0, \rightarrow\rangle$ en het bereik $[0, \rightarrow\rangle$ is;
  - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
  - de grafiek door (0,0) en (1,1) gaat;
  - de vergelijking $x^{\frac{1}{p}} = a$ één oplossing heeft als $a \geq 0$.
- Als $p > 1$ en p oneven geldt voor $y = x^{\frac{1}{p}}$ dat:
  - het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $\mathbb{R}$ is;
  - de grafiek stijgend is voor alle x uit het domein;
  - de grafiek door (0,0), (1,1) en (-1,-1) gaat;
  - de vergelijking $x^{\frac{1}{p}} = a$ één oplossing heeft voor alle waarden van a.
- Als $p < -1$ en p is even, dan geldt voor $y = x^{\frac{1}{p}}$ dat:
  - het domein $\langle 0, \rightarrow\rangle$ en het bereik $\langle 0, \rightarrow\rangle$ is;
  - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
  - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
  - de vergelijking $x^{\frac{1}{p}} = a$ één oplossing heeft als $a > 0$.
- Als $p < -1$ en p oneven, dan geldt voor $y = x^{\frac{1}{p}}$ dat:
  - het domein $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ en het bereik $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ is;
  - de grafiek dalend is voor elke x uit het domein;
  - de grafiek horizontale asymptoot $y = 0$ en verticale asymptoot $x = 0$ heeft;
  - de vergelijking $x^{\frac{1}{p}} = a$ één oplossing heeft als $a \neq 0$.

Kijk nog eens goed of de grafische rekenmachine dezelfde grafieken geeft. Er kunnen verschillen zijn. Merk ook op dat de grafiek in de buurt van $x = 0$ niet altijd helemaal netjes wordt gemaakt.

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 3**. Maak met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies: $a(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $b(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $c(x) = x$ en $d(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

a Voor welke waarden van x geldt $a(x) < b(x)$?

b Voor welke waarden van x geldt $d(x) < b(x)$?

c Voor welke waarden van x geldt $d(x) > c(x)$?

d Maak in één figuur een schets van de grafieken van $d(x)$ en $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$.

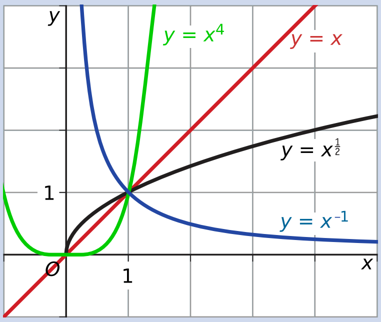
e Voor welke waarden van x geldt $x^{\frac{1}{4}} > 4$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Je ziet enkele grafieken van de standaard **machtsfunctie** $y = x^p$ voor verschillende waarden van p.



Figuur 4

Voor $x > 0$ zijn eigenschappen van $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$:

- $p > 1$: de grafiek gaat door de punten (0,0) en (1,1) en stijgt steeds sneller;
- $p = 1$: de grafiek bij $y = x$ is lineair en gaat door de punten (0,0) en (1,1);
- $0 < p < 1$: de grafiek gaat door de punten (0,0) en (1,1) en stijgt steeds langzamer;
- $p < 0$: de functie is niet gedefinieerd voor $x = 0$, de grafiek gaat door het punt (1,1) en daalt steeds langzamer, de x-as en de y-as zijn asymptoten van de grafiek.

Voor $x < 0$ bestaat de functie alleen als p een geheel getal is of als p een breuk is met een oneven noemer, zoals $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$, enzovoort. Afhankelijk van het even of oneven zijn van p is de grafiek daar dalend of stijgend.

De vergelijking $x^p = a$ heeft één oplossing als p (ongelijk aan 0) een oneven geheel getal is, namelijk $x = a^{\frac{1}{p}}$. Wanneer p een even geheel getal (ongelijk aan 0) is en $a > 0$ zijn er twee oplossingen, namelijk $x = -a^{\frac{1}{p}} \vee x = a^{\frac{1}{p}}$. Wanneer p een even geheel getal (ongelijk aan 0) is en $a < 0$ zijn er geen oplossingen.

Bij functies van de vorm $y = c \cdot x^{-n} = \frac{c}{x^n}$ is y **recht evenredig** met x^{-n} en **omgekeerd evenredig** met x^n.

Voorbeeld 1

Los op: $3x^{\frac{3}{2}} < 12$.

Antwoord

Beide kanten delen door 3 geeft: $x^{\frac{3}{2}} < 4$.

Los eerst op: $x^{\frac{3}{2}} = 4$.

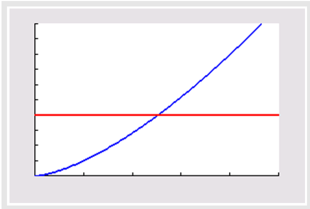
Oplossing: $x = 4^{\frac{2}{3}} \approx 2{,}52$.

Maak de grafiek van $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ op de grafische rekenmachine.

Merk op dat voor de x-waarden van de functie geldt: $x > 0$. De vergelijking heeft inderdaad maar één oplossing.

Lees de (benaderde) oplossing van de ongelijkheid uit de grafiek af:

$0 \leq x < 2{,}52$



Figuur 5

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de ongelijkheid $3x^{\frac{3}{2}} < 12$ oplost.

a Los eerst de vergelijking $3x^{\frac{3}{2}} = 12$ algebraïsch op.

b In het voorbeeld wordt daarbij een macht met exponent $\frac{2}{3}$ gebruikt. Licht die stap toe. Heb je dat zelf ook gedaan?

c Los op dezelfde manier algebraïsch op: $15x^{\frac{5}{4}} < 180$. Geef je eindantwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie: $f(x) = 2(x-4)^3 - 10$.

Los op: $f(x) = 20$.

Antwoord

Om $f(x) = 20$ op te lossen, kun je stap voor stap terugrekenen:

$$\begin{aligned} 2(x-4)^3 - 10 &= 20 \\ 2(x-4)^3 &= 30 \\ (x-4)^3 &= 15 \\ x - 4 &= 15^{\frac{1}{3}} \\ x &= 15^{\frac{1}{3}} + 4 \end{aligned}$$

Je vindt: $x = 15^{\frac{1}{3}} + 4 \approx 6{,}47$.

Opgave 6

Bekijk de functie $f(x) = 3(x + 2)^3 - 5$.

a Hoe ontstaat door herschalen en verschuiven de grafiek van f uit die van $y = x^3$?

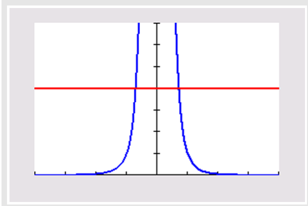
b Los op: $f(x) \leq 10$. Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 3

Los op: $\frac{1}{x^4} > 4$.

Antwoord

Omdat volgens de eigenschappen van machten en exponenten geldt $y = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$ is ook hier sprake van een machtsfunctie. Maak eerst de grafiek van $y_1 = x^{-4}$ en de lijn $y_2 = 4$ op de grafische rekenmachine.



Figuur 6

Los nu op: $x^{-4} = 4$.

Oplossing: $x = 4^{-\frac{1}{4}} \vee x = -4^{-\frac{1}{4}}$, dus $x \approx 0{,}7 \vee x \approx -0{,}7$.

In de grafiek is de oplossing van de ongelijkheid af te lezen: $-0{,}7 < x < 0 \vee 0 < x < 0{,}7$.

Merk op dat je $x = 0$ uitzondert, omdat voor deze waarde de functie niet bestaat.

Opgave 7

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

a $x^2 < \sqrt{x}$

b $\frac{1}{x^4} = 81$

c $\frac{1}{x^3} > 27$

d $\frac{1}{x^3} < 30$

e $x^5 < x^4$

f $x^6 < x^4$

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 2(x + 1)^{-2} - 4$.

a Welke asymptoten heeft de grafiek van $y = x^{-2}$?

b Beschrijf hoe de grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = x^{-2}$.

c Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

d Los op: $f(x) < 10$. Rond af op twee decimalen.

Verwerken

Opgave 9

In een grootwinkelbedrijf onderzoekt de commerciële afdeling hoe de tomatenverkoop afhangt van de prijs. Iemand beweert dat dan de volgende formule geldt: $a = \frac{500}{p}$. Hierin is a de verkoop per dag in kg en p de prijs per kg in euro's.

a Je ziet dat a omgekeerd evenredig is met p. Schrijf de formule zo, dat a recht evenredig is met een macht van p.

b Als de prijs verdubbeld wordt, wordt de verkoop per dag dan meer of minder dan gehalveerd?

c Het bedrijf heeft een voorraad van 300 kg tomaten. Bereken de prijs waarbij de voorraad binnen een dag is verkocht. Geef ook de formule waarmee je dit direct kunt berekenen.

d Hoe groot is de verkoop bij een prijs van € 0,01? En bij € 100,00? Geef zelf aan wat dit betekent voor de bruikbaarheid van deze formule.

Opgave 10

Los deze vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $2x^{\frac{1}{3}} = 4$

b $4x^{\frac{5}{2}} = 2$

c $\frac{10}{x^5} < 5$

d $3x^{\frac{1}{4}} > 3$

Opgave 11

Gegeven is de functie $f(x) = 4(x-2)^3 - 7$.

a Leg uit hoe de grafiek van deze functie door verschuiven en herschalen kan ontstaan uit de grafiek van $y = x^3$.

b Los op in twee decimalen nauwkeurig: $f(x) \leq 13$.

Opgave 12

Bekijk de grafieken van de functies $f(x) = -5 + 2\sqrt{x-3}$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

a Schrijf $f(x)$ en $g(x)$ met machten en beschrijf hoe de grafiek van f vanuit die van g kan ontstaan.

b Los op: $f(x) \geq 100$

Opgave 13

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{100}{(x-10)^2} + 25$.

a Laat zien dat de grafiek van deze functie kan ontstaan uit een machtsfunctie. Schrijf de bijbehorende verschuivingen en herschaling op.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

c Los op: $f(x) \leq 50$.

Opgave 14

Gegeven is de formule $y = -2(x-50)^n + 100$. Neem aan dat n een geheel getal is.

a Voor welke waarden van n heeft de functie een extreme waarde?

b Is die extreme waarde een maximum of een minimum? Waar zie je dat aan?

c Hoe kun je uit deze formule aflezen waar de top zich bevindt? Geef de coördinaten van deze top.

Toepassen

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (liter) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (kilogram). In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens.
Je kunt een formule opstellen voor Z afhankelijk van m als je uitgaat van een machtsfunctie van de vorm $Z = c \cdot m^p$, waarin de waarden van c en p nog berekend moeten worden.

soort	m(kg)	Z(L)
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 1

Je hebt daartoe genoeg aan de gegevens van twee diersoorten, bijvoorbeeld:

- paard: $Z = 85{,}4$ en $m = 605{,}0$ geeft: $85{,}4 = c \cdot 605{,}0^p$.
- muis: $Z = 0{,}19$ en $m = 0{,}20$ geeft: $0{,}19 = c \cdot 0{,}20^p$.

Met de balansmethode vind je: $\frac{85{,}4}{0{,}19} = \frac{c \cdot 605{,}0^p}{c \cdot 0{,}20^p} = \frac{605{,}0^p}{0{,}20^p} = \left(\frac{605{,}0}{0{,}20}\right)^p$ en dus $449{,}47 \approx 3025^p$. Zo'n exponentiële vergelijking kun je oplossen met de grafische rekenmachine. Je vindt $p \approx 0{,}76$. Nu kun je door invullen uitrekenen dat $c \approx 0{,}66$. Dus $Z \approx 0{,}7 \cdot m^{0{,}76}$.

Opgave 15

Bekijk het verhaal van de formule van Kleiber. Er wordt een formule opgesteld voor het verband tussen het zuurstofverbruik Z in liters en de massa m in kg bij zoogdieren. Daarbij wordt gebruikgemaakt van de gegevens van de muis en het paard.

a Stel de formule op uitgaande van de gegevens van de rat en de mens. Vind je dezelfde formule?

b Bereken het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg. Rond af op één decimaal.

Opgave 16

Zoogdieren hebben allemaal ongeveer dezelfde lichaamstemperatuur. Hoe zwaarder een zoogdier is, hoe meer energie het kost om de lichaamstemperatuur constant te houden. Het gewicht G (gram) is recht evenredig met een macht van de energie P (joule) die per minuut nodig is om de lichaamstemperatuur constant te houden. Je ziet een tabel met een aantal waarden voor G en P.

G	1000	2000	5000	15000
P	3,02	5,08	10,11	23,04

Tabel 2

a Stel een formule op waarin je P uitdrukt in G.

b Hoeveel energie P per minuut heeft een mens van 70 kg nodig? Rond af op twee decimalen.

c Wat gebeurt er met P als G twee keer zo groot wordt?

Testen

Opgave 17

Geef van de volgende machtsfuncties:

- het domein en het bereik
- de intervallen waarop de grafiek dalend dan wel stijgend is
- het maximum of minimum (voor zover van toepassing)
- de asymptoten (voor zover van toepassing)

a $a(x) = x^5$ en $b(x) = x^6$

b $c(x) = x^{-3}$ en $d(x) = x^{-4}$

c $e(x) = x^{\frac{1}{4}}$ en $f(x) = x^{3\frac{1}{2}}$

Opgave 18

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $2(x+4)^4 - 10 = 490$

b $10 - 2\sqrt{x-4} > 6$

c $5 \cdot x^{\frac{2}{5}} = 20$

d $2(x+1)^3 > 100$

e $\frac{25}{x^3} \leq 5$

Practicum: Machtsfuncties

Met deze applet maak je machtsfuncties. Verzin zo'n functie. Bedenk eerst hoe hij kan ontstaan uit $y = x^p$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

Bekijk de applet: Machtsfunctie

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.