5.1 Machten

Inleiding

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$. Dit is een voorbeeld van een machtsverband, want de variabele h moet tot de macht $\frac{1}{2}$ worden verheven. Je kunt ook zeggen dat h een machtsfunctie is van a. Je maakt in dit onderdeel met machtsfuncties kennis.

Je leert in dit onderwerp

- wat een machtsverband en een machtsfunctie is;
- bij een machtsverband heen en terug te rekenen;
- hoe bij een machtsverband de verandering van de éne variabele samenhangt met die van de andere.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.

Verkennen

Opgave V1

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$.

Geef van de volgende beweringen aan of ze waar zijn of niet, en geef een uitleg.

Figuur 1

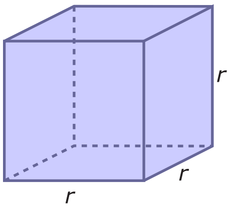
a Als je op een toren van 100 m hoog staat kun je meer dan 30 km ver kijken.

b Als je op een toren van 50 m hoog staat kun je niet verder dan (afgerond) 18 km kijken.

c Op een hoogte van 100 m kun je twee keer zo ver kijken als op een hoogte van 50 m.

Uitleg

De inhoud I van een kubus met ribben van lengte r is: $I = r \cdot r \cdot r = r^3$.



Figuur 2

Dit is een voorbeeld van een machtsfunctie: de variabele r moet tot de derdemacht worden verheven om een functiewaarde te vinden. Als $r = 5$, dan is $I = 5^3 = 125$.

Stel nu dat je een kubus hebt met een inhoud van 100, wat is dan de lengte van een ribbe van deze kubus?

Je weet dat $\left(r^3\right)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \cdot \frac{1}{3}} = r^1 = r$. Je kunt daarom van r^3 terugrekenen naar r door de omgekeerde macht te gebruiken: als $r^3 = 100$ dan is $r = 100^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{100}$. Met de rekenmachine kun je een benadering voor dit getal vinden: $r \approx 4{,}64$.

Kijk je naar de massa van de kubus, dan moet je rekening houden met de soortelijke massa. Dat is de massa (kilogram) van 1 dm^3. De soortelijke massa van ijzer is 7,87 kg per dm^3. De massa m is dan recht evenredig met de inhoud I: $m = 7{,}87 \cdot I$. Als de inhoud bijvoorbeeld twee keer zo groot wordt, wordt de massa ook twee keer zo groot.

De formule voor de inhoud van de kubus en de formule voor de massa van de kubus kun je combineren. De formule voor de inhoud van de kubus is $I = r^3$. In de formule voor de massa van de kubus mag je dus I vervangen door r^3. Voor de massa van de kubus geldt dan: $m = 7{,}87 \cdot r^3$, met r in decimeters. De massa is nu uitgedrukt in de lengte van de ribbe.

Dit is opnieuw een voorbeeld van een machtsfunctie: m is recht evenredig met een macht van r. Als r^3 bijvoorbeeld twee keer zo groot wordt, wordt m ook twee keer zo groot.

Opgave 1

De formule voor de inhoud I van een kubus is $I = r^3$, waarbij r de lengte van een ribbe is.

a Bereken de inhoud van een kubus waarvan de ribbe 4 cm is.

b Maak de ribbe twee keer zo groot. Wat gebeurt er met de inhoud?

c Bereken hoe groot je de ribbe moet nemen om een kubus te krijgen met een inhoud van 500 cm^3. Rond af op één decimaal.

De soortelijke massa van marmer is 2,7 g/cm^3.

d Licht toe dat de massa m van een kubus van marmer recht evenredig is een macht van de ribbe r. Geef de bijbehorende formule.

Opgave 2

Ook het verband tussen de lengte van de ribben r en de oppervlakte A van een kubus is een machtsverband. De bijbehorende formule is: $A = 6r^2$.

a Is de oppervlakte recht evenredig met de tweede macht van de ribbe, of is de ribbe recht evenredig met de tweede macht van de oppervlakte?

b Bereken de oppervlakte van een kubus met een ribbe van 5 cm.

c Hoeveel keer zo groot moet de ribbe worden om een kubus te krijgen met een 4 maal zo grote oppervlakte?

d Druk r uit in A.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

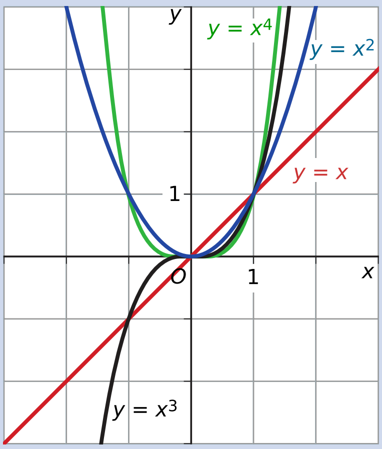
Bekijk de applet: machtsfuncties

Als y **recht evenredig met een macht** van x is, dus $y = c \cdot x^p$, dan spreek je van een **machtsfunctie**. De constante c is de **evenredigheidsconstante**.

Bekijk de voorbeelden van grafieken van machtsfuncties. Daarbij is p steeds een positief getal of 0 en $c = 1$.

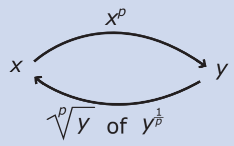
Vanuit de machtsfunctie $y = x^p$ (dus als $c = 1$) kun je op twee manieren terugrekenen:

- $x = \sqrt[p]{y}$
- $x = y^{\frac{1}{p}}$



Figuur 3

Als de evenredigheidsconstante niet de waarde 1 heeft, begin je met door c te delen. Daarna pas je of de p-demachtswortel toe, of je werkt met de omgekeerde macht. Afhankelijk van de waarde van p zijn er één of twee mogelijke uitkomsten.



Figuur 4

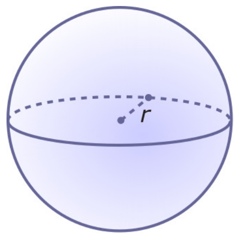
Voor elke x en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende

eigenschappen van machten en exponenten		
$x^0 = 1$	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ mits $x \neq 0$	$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ mits $x \geq 0$ en $a > 0$
$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$	$x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$ mits $x \neq 0$	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Voorbeeld 1

De inhoud van een bol is recht evenredig met de derdemacht van de straal: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

Bepaal de evenredigheidsconstante en bereken de straal van een bol met een inhoud van $I = 1000$ cm^3 in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 5

Antwoord

De evenredigheidsconstante is $\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}19$.

Om de straal van de bol te berekenen moet je de vergelijking $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 1000$ oplossen:

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 &= 1000 && \text{links en rechts delen door } \tfrac{4}{3}\pi \\ r^3 &= 238{,}732... && \text{links en rechts tot de macht } \tfrac{1}{3} \\ r &= (238{,}732...)^{\frac{1}{3}} \approx 6{,}20 \end{aligned}$$

Je vindt: $r \approx 6{,}20$ cm.

In de laatste stap kun je dus ook de derdemachtswortel trekken: $r = \sqrt[3]{238{,}732...} \approx 6{,}20$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** is de formule voor de inhoud van een bol gegeven. Rond af op één decimaal nauwkeurig.

a Bereken de inhoud in cm^3 als $r = 0$, 5, 10, 15 en 20 cm.

b Maak een tabel waarin r^3 wordt uitgezet tegen I. Hoe ziet de bijbehorende grafiek eruit? Hoe blijkt hieruit dat I recht evenredig is met r^3?

c Je kunt de formule $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ ook schrijven in de vorm $r = ...$ Laat zien hoe je dit kunt doen.

Opgave 4

Bij welke van de volgende formules is y recht evenredig met een macht van x? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante.

a $y = 2x$

b $y = 2x^4 + 5$

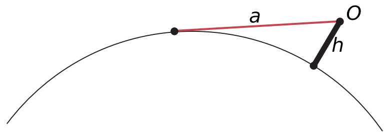
c $y = 0{,}15x^4$

d $y = 5 + 0{,}15x^4$

Voorbeeld 2

In een vlak landschap is er een verband tussen hoe ver je kunt kijken en hoe hoog je ogen zich boven het landschap bevinden. Voor de kijkafstand a (meter) als functie van de hoogte h (meter) geldt:

$a = 3572 \cdot h^{\frac{1}{2}}$.



Figuur 6

Omdat $h^{\frac{1}{2}} = \sqrt{h}$ kun je deze formule ook schrijven als $a = 3572 \cdot \sqrt{h}$.
Je kunt bij deze machtsfunctie bij een gegeven waarde van h de bijbehorende waarde van a berekenen en omgekeerd. Laat dat met voorbeelden zien.

Antwoord

Bijvoorbeeld bij $h = 30$ geldt $a = 3572 \cdot 30^{\frac{1}{2}} = 3572 \cdot \sqrt{30} \approx 19564$.
Neem je omgekeerd een kijkafstand van 20 km, dus $a = 20000$, dan geldt:

$$3572 \cdot h^{\frac{1}{2}} = 20000$$

links en rechts delen door 3572

$$h^{\frac{1}{2}} = \frac{20000}{3572}$$

links en rechts kwadrateren

$$h = \left(\frac{20000}{3572}\right)^2$$

Er geldt: $h = \left(\frac{20000}{3572}\right)^2 \approx 31{,}3$.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 2** de formule voor de kijkafstand.

a Bereken in meters nauwkeurig hoe ver je kunt kijken vanaf een toren van 50 m hoog.

Op een eiland wordt een vuurtoren gebouwd. De toren wordt zo hoog gemaakt dat je bij helder weer 25 km ver kunt kijken.

b Bepaal de hoogte van de toren op de volgende manieren:

- Aflezen uit de grafiek: $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$.
- In de formule $a = 3572h^{\frac{1}{2}}$ de variabele a vervangen door 25000; de vergelijking die je dan krijgt, moet je oplossen door hem stapsgewijs te vereenvoudigen.
- Berekenen met de formule: $h = \left(\frac{a}{3572}\right)^2$.

Opgave 6

Gegeven is het volgende machtsverband tussen: $y = 5 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

a Bereken y als $x = 16$.

b Bereken y als $x = 20$ in twee decimalen nauwkeurig.

c Bereken x als $y = 10$.

d Bereken x als $y = 30$.

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de machtsfunctie $f(x) = 120x^5$.

a Bereken $f(4)$.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 20000$? Rond af op twee decimalen.

c Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 8

Voor een bezoek aan een zwembad gelden de volgende tarieven per persoon:

- Standaardtarief: € 2,50 per bezoek
- Abonnementstarief: € 1,20 per bezoek met een abonnement van € 25,00 per jaar

Stel het aantal bezoeken aan dit zwembad per jaar voor door a en noem de kosten daarvan K (euro).

a Stel voor beide tarieven een formule op voor K als functie van a.

b Bij welke van beide tarieven zijn de kosten recht evenredig met het aantal bezoeken? Licht je antwoord toe.

c Bereken algebraïsch vanaf hoeveel bezoeken per persoon per jaar het voordelig is om een abonnement aan te schaffen.

Opgave 9

Er is een verband tussen de snelheid s van een auto en de bijbehorende remweg r. De remweg is de afstand die de auto nog aflegt als je zo hard mogelijk remt. Een vuistregel voor dit verband is: $r = \frac{s^2}{100}$.

a r is recht evenredig met een macht van s. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b In een weg zit een scherpe bocht waarin je maar 10 meter vooruit kunt kijken. Een eis voor veilig rijden is dat je moet kunnen stoppen binnen de afstand die je kunt overzien. Hoe groot is volgens deze vuistregel de maximumsnelheid in deze bocht? Rond af op één decimaal nauwkeurig.

c Geef de formule waarmee de snelheid wordt uitgedrukt in de remweg. Beschrijf in woorden wat voor verband dit is.

d Is de volgende uitspraak waar of niet waar: 'Bij een zicht van 100 meter kun je twee maal zo hard rijden als bij een zicht van 50 meter'?

Opgave 10

Deze opgave gaat over de inhoud I (cm^3) van een kubus met ribben r in centimeters.

a Bereken de inhoud van een kubus met $r = 2$.

b Bereken de inhoud van een kubus met $r = 6$.

c De ribbe van de tweede kubus is drie keer zo groot als de ribbe van de eerste. Wat betekent dit voor de inhoud van de kubus?

d Een kubus heeft een inhoud van 50 cm^3. Bereken r in één decimaal nauwkeurig.

e Geef de formule waarmee je de inhoud I uitdrukt in r.

f Geef de formule waarmee je de lengte r van de ribbe uitdrukt in inhoud I.

Opgave 11

Een formule voor de totale oppervlakte A van een kubus met ribben r is: $A = 6r^2$.

a Licht toe hoe je deze formule kunt afleiden.

b Bereken de totale oppervlakte van een kubus met ribben van 3 cm.

c Bereken de totale oppervlakte van een kubus met ribben van 6 cm.

d Wat gebeurt er met de totale oppervlakte als je de ribben twee keer zo groot maakt?

e Van een kubus is de totale oppervlakte 500 cm^2. Bereken de lengte van de ribben. Rond af op twee decimalen.

f Geef een formule waarmee je de ribbe r uitdrukt in de totale oppervlakte A.

Opgave 12

Ga uit van een massieve ijzeren kubus met ribben r in cm. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Stel een formule op voor het gewicht G van de kubus als functie van r.

b Stel een formule op voor de oppervlakte A van de kubus als functie van r.

c Leid een formule af van de vorm $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de evenredigheidsconstante c. Rond c af op twee decimalen.

d Bereken het gewicht van zo'n kubus als de totale buitenoppervlakte 150 cm^2 is.

Toepassen

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een relatief grote huidoppervlakte in verhouding tot hun inhoud zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten.

Meeh vond de formule: $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$.
Hierin is H de huidoppervlakte (dm^2) en G het gewicht (kg) van het dier.

Je ziet dat de huidoppervlakte recht evenredig is met de $\frac{2}{3}$ macht van het lichaamsgewicht. De factor c is de evenredigheidsconstante en verschilt per diersoort. In de biologie wordt deze evenredigheidsconstante de **Meeh-coëfficiënt** genoemd.

In de tabel zie je gewichten G (kg) van een Schotse Hooglander met de bijbehorende huidoppervlakte H (dm^2).

G	430	450	490	500	420
H	507	523	553	560	500

Tabel 1

Hiermee kun je de Meeh-coëfficiënt van de Schotse Hooglander berekenen.
Daarmee kun je dan weer berekenen hoe zwaar een Schotse Hooglander is met een gegeven huidoppervlakte.

Opgave 13

Bekijk het verband tussen huidoppervlakte (dm^2) en lichaamsgewicht (kg) van dieren.

a Hoe heet de constante c voor de diersoorten?

b Laat met een berekening zien dat voor de Schotse Hooglander geldt: $c \approx 8{,}9$.

c De huid van een bepaalde Schotse Hooglander heeft een oppervlakte van ongeveer 510 dm^2. Hoe zwaar was die koe?

Opgave 14

In deze tabel zie je een vijftal gewichten G (kg) van een mens, met de bijbehorende huidoppervlakte H (dm^2).

G	40	50	60	70	80
H	131	152	172	190	208

Tabel 2

In het voorbeeld zag je dat je hierbij een formule van de vorm $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$ kunt opstellen, waarbij c de Meeh-coëfficiënt van de mens is.

a Bereken c in één decimaal nauwkeurig met de waarden uit de eerste kolom.

b Hoeveel bedraagt de huidoppervlakte van iemand die 50 kg weegt?

c Hoeveel bedraagt het gewicht van iemand met een huidoppervlakte van 212 dm^2?

Opgave 15

Ook voor een massieve bol beschrijft de formule van Meeh het verband tussen de oppervlakte A en het gewicht G. Ga uit van een massieve ijzeren bol; de soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Zoek de formules op voor de inhoud van een bol met straal r en de oppervlakte van zo'n bol.

b Welke formule geldt voor het gewicht G als functie van de straal r van de bol? Neem r in centimeters en G in grammen.

c Door de formules voor het gewicht en de oppervlakte van een bol met straal r te combineren, vind je $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c.

Testen

Opgave 16

Gegeven is de machtsfunctie f met formule $y = 5 \cdot (3x)^4$.

a y is recht evenredig met een macht van x. Wat is de evenredigheidsconstante?

b Voor welke waarden van x is $f(x) = 12000$?

c Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 17

Het volume van een cilinder kun je berekenen met de formule $V = \pi r^2 h$. Hierin is r de straal van het grondvlak en h de hoogte van de cilinder, beide in centimeters. Je wilt blikken maken die even hoog als breed zijn, dus waarvan $h = 2r$.

a Welke formule geldt bij deze blikken voor V als functie van r?

b Herschrijf deze formule tot een formule waarin r recht evenredig is met een macht van V. Bepaal de evenredigheidsconstante. Rond af op twee decimalen.

c De oppervlakte van zo'n blik bestaat uit een rechthoek en twee cirkels. Leid een formule af voor de oppervlakte A als functie van r.

d Laat zien dat tussen A en V een machtsverband bestaat van de vorm $A = c \cdot V^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c. Rond af op twee decimalen.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.