4.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Logaritmische functies** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- logaritme — grondtal
- definitieformules — eigenschappen van logaritmen
- logaritmische schaal
- logaritmische functie
- logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden

Activiteitenlijst

- logaritmen gebruiken om exponentiële vergelijkingen op te lossen
- definitieformules en eigenschappen van logaritmen gebruiken — vergelijkingen met logaritmen oplossen
- werken met logaritmische schalen — functievoorschrift bepalen van exponentiële functie op enkellogaritmisch papier
- de karakteristieken van een logaritmische functie bepalen
- logaritmische vergelijkingen/ongelijkheden oplossen

Achtergronden

Figuur 1

In 1614 verscheen ‘Mirifici logarithmorum canonis descriptio’ van **sir John Napier (1550—1617)**. Hierin staat de eerste beschrijving van logaritmen. In het voorwoord legt Napier uit dat zijn doel was het vinden van een eenvoudige manier om grote getallen te vermenigvuldigen, te delen, te kwadrateren en er wortels uit te trekken. Hij voerde een bepaalde handeling op die grote getallen uit waardoor hij er getallen van maakte waarmee hij door eenvoudig optellen en aftrekken hetzelfde resultaat verkreeg als andere door lastige vermenigvuldigingen en delingen. Die handeling (een functie zou je nu zeggen) noemde hij ‘logaritme nemen’ (‘logos arithmos’ is ‘verhouding van getallen’).

Een voorbeeld:

Stel je wilt $a \cdot b = 1296 \cdot 63508$ berekenen. Je neemt van beide getallen de logaritme (grondtal 10): $\log(1296) = 3{,}112605...$ en $\log(63508) = 4{,}8028284...$.
Nu gebruik je de rekenregel: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.
Dus is $\log(a \cdot b) = 3{,}112605... + 4{,}8028284... = 7{,}915433...$
Tenslotte werk je die logaritme weer weg en je vind het antwoord 82306368.

Je ziet hoe Napier van een vervelende vermenigvuldiging $1296 \cdot 63508$ een gemakkelijke optelling maakte! In de tijd dat er geen elektronische rekenmachines waren, was dit een enorm belangrijke stap vooruit, voor het berekenen van de logaritmen werden tabellenboeken gemaakt (die tot voorbij het midden van de vorige eeuw in gebruik waren, ook op school). Napier's logaritmen hadden trouwens nog niet het grondtal 10 (zoals in het voorbeeld), dat laatste is het werk van **Henry Briggs (1561—1630)**. Hij las in 1615 de Latijnse versie van Napier's geschrift en was er meteen van onder de indruk. Hij suggereerde Napier zijn logaritme zo aan te passen, dat $\log(1) = 0$ en het grondtal 10 is. Ze werden het eens en Briggs maakte een tabel voor logaritmen van getallen gebaseerd op grondtal 10.

Testen

Opgave 1

Iemand verwachtte in 2002 dat de jaren daarna aandelen 11% per jaar in waarde zouden stijgen.

a Hoelang duurt het in dat geval totdat de waarde van de aandelen 1,5 keer zo groot is geworden? Rond af op gehele jaren.

b Iemand koopt voor € 2000,00 aandelen. Bereken na hoeveel jaar dit bedrag is verdubbeld. Bereken ook na hoeveel jaar het bedrag is verdrievoudigd en na hoeveel jaar het is verzesvoudigd. Laat zien hoe hiermee de eigenschap ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$ kan worden toegelicht.

Opgave 2

Een doorzichtige kunststof absorbeert per cm 27% van het licht dat er doorheen valt.

Bereken in mm nauwkeurig hoe dik de kunststof moet zijn om 50% van het licht te absorberen.

Opgave 3

Los algebraïsch op.

a ${}^{\frac{1}{3}}\log(x+2) = -2$

b ${}^{2}\log(x) = 5 - {}^{2}\log(16)$

c ${}^{5}\log\left(4x^2\right) = 2 + {}^{5}\log(x)$

d $10 + 5 \cdot {}^{2}\log(x-5) \leq 100$

Opgave 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x+10) + 4$ en $g(x) = \log(-x)$.

a Bepaal van beide functies domein, bereik en de vergelijking van de asymptoot.

b Bepaal van beide functies algebraïsch het nulpunt.

c Los algebraïsch op: $f(x) \leq g(x)$.

Gegeven is de functie $h(x) = f(x) + g(x)$.

d Toon aan dat $h(x) = \log\left(-100000x - 10000x^2\right)$.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar hangt af van de hoogte h (kilometer) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt

$$h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

a Neem aan dat $p_0 = 1010$ millibar. Plot de grafiek van h als functie van p.

In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 millibar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 millibar.

b Bereken hoe hoog het vliegtuig vliegt.

c Neem aan dat $p_0 = 1010$. Druk p uit in h. Rond waar nodig af op drie decimalen.

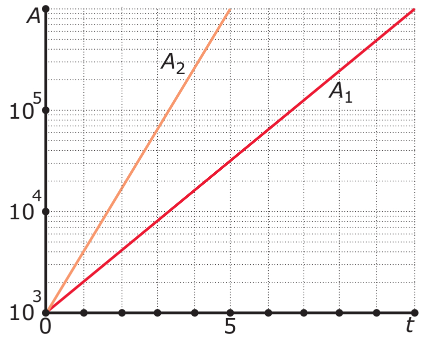
d Verklaar waarom de grafiek van h met $p_0 = 930$ millibar ontstaat door de grafiek bij a in verticale richting te verschuiven.

De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 millibar op zeeniveau en berekent dat het vliegtuig zich op 3 kilometer hoogte bevindt. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 millibar.

e Hoe hoog bevindt het vliegtuig zich in werkelijkheid? Rond af op meters.

Opgave 6

In een laboratorium is onderzocht hoe de toename van het aantal bacteriën in 10 gram salade afhankelijk is van de temperatuur. Bekijk in de grafiek de resultaten bij een temperatuur van 0 en bij een temperatuur van 4 graden Celcius.



Figuur 2

a Van hoeveel bacteriën is bij het onderzoek uitgegaan?

b Geef zowel voor A_1 als A_2 de formule van het aantal bacteriën A na t dagen.

c Bereken hoeveel keer zo veel bacteriën er na tien dagen bij 4 °C zijn vergeleken met de situatie bij 0 °C.

d Bereken hoeveel de verdubbelingstijd bij een koeling bij 4 °C bedraagt.

Volgens de onderzoekers is er bij de toename van het aantal bacteriën als functie van de temperatuur sprake van toenemende stijging. Voor temperaturen boven 0 °C geldt: wordt de temperatuur a keer zo hoog, dan wordt de verdubbelingstijd a^2 keer zo klein.

e Geef de verdubbelingstijd van de bacterie bij 6 °C. Doe dat ook bij 10 °C.

Toepassen

Opgave 7: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip ‘zuurgraad’ gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $[H_3O^+]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $[H_3O^+] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7}: pH $= -\log\left(10^{-7}\right) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: pH $= -\log\left[H_3O^+\right]$.

a Bij geconcentreerd zwavelzuur is $[H_3O^+] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?

b Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van 11,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie in mol/L?

c Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie van zure regen?

d Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?

e De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijke pH van de huid is ongeveer 5,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+-concentratie dan?

Opgave 8: C-14 methode

In levende organismen komt behalve het radioactieve koolstof C-14 ook het niet-radioactieve C-12 voor. Gelukkig is de verhouding van de hoeveelheid C-14 ten opzichte van C-12 zeer klein. Deze verhouding is constant $1 : 10^{12}$. Wanneer een organisme sterft verandert de verhouding door radioactief verval van C-14. Door de verhouding te meten kan de ouderdom van resten organisch materiaal berekend worden. De halveringstijd van C-14 is 5730 jaar.

a Een archeoloog vindt een bot waarvan de verhouding C-14 : C-12 gelijk is aan $1 : 10^{13}$. Hoeveel jaar is dat bot ongeveer oud?

b Bij een Egyptische mummie blijkt de verhouding van C-14 en C-12 ongeveer 0,65 keer de verhouding van C-14 en C-12 in levende organismen te zijn. Benader de ouderdom van deze mummie.

c In 1947 zijn aan de westzijde van de Dode Zee de Dode-Zeerollen (oudtestamentische handschriften) gevonden. De verhouding van C-14 en C-12 in de perkamenten rollen bleek tussen de 77% en de 81% van die bij levende organismen te zijn. Vanaf hoeveel jaar voor het begin van de jaartelling tot hoeveel jaar erna zijn de Dode-Zeerollen geschreven?

d Een 4500 jaar oude kist werd in een hunebed (grafkelder in de provincie Drenthe) aangetroffen. Hoe groot is de verhouding van de aangetroffen hoeveelheid C-14 en C-12 ongeveer in vergelijking met die van een houten kist uit onze tijd?

Examen

Opgave 9: Vliegtuiglawaai

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt. In deze opgave nemen we aan dat alle vliegtuigen hetzelfde geluidsniveau hebben. Dit geluidsniveau geven we aan met L. De waarde van L bepaalt hoeveel vliegtuigen jaarlijks maximaal mogen passeren. Dit maximale aantal noemen we N. Voor een gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk gold aan het eind van de vorige eeuw de voorwaarde:

$20 \cdot \log(N) = 202 - \frac{4}{3}L$

Door het gebruik van nieuwe technieken neemt het geluidsniveau L van vliegtuigen af.

a In een zekere periode nam L af van 75 dB naar 70 dB. Toon door berekening aan dat N in die periode meer dan verdubbelde.

b Bereken de maximale waarde van L waarbij er een half miljoen (500000) vliegtuigen mogen passeren.

In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Voor het gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk geldt sindsdien:

$20 \cdot \log(N) = 248 - 2L$

De oude en de nieuwe formule leverden in 2001 dezelfde waarde van N op.

c Bereken welke waarde L in 2001 had.

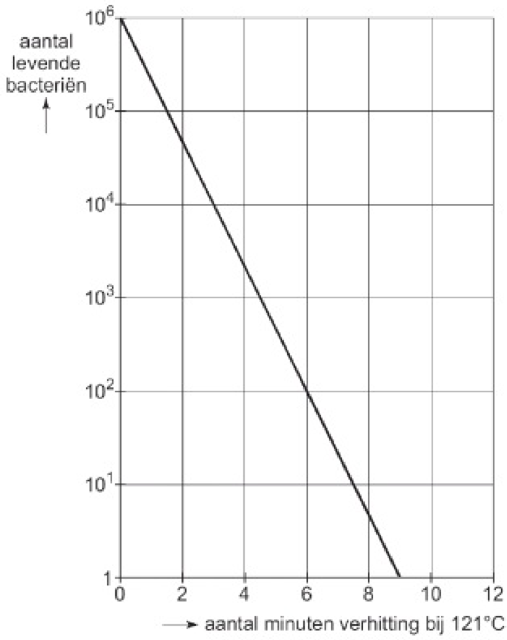
d Laat zien dat de formule voor de nieuwe situatie is te herleiden tot: $N \approx 2{,}512 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}794^{L}$.

(bron: naar examen wiskunde A1 vwo 2003, tweede tijdvak, opgave 4)

Opgave 10: Sterilisatie

Om voedingswaren tegen bederf te beschermen, worden ze tijdelijk verhit. Men noemt dit steriliseren. Er zijn verschillende sterilisatiemethoden. In deze opgave kijken we naar het sterilisatieproces bij twee soorten bacteriën. De temperatuur bij dat proces is 121 °C. Naarmate de bacteriën korter aan deze temperatuur zijn blootgesteld, zullen er meer bacteriën overleven. In de figuur zie je een overlevingsgrafiek van de Bacillus stearothermophilus. Bij een overlevingsgrafiek heeft de verticale as altijd een logaritmische schaalverdeling. Het aantal bacteriën bij aanvang van het sterilisatieproces stelt men altijd op 1 miljoen. We gaan er steeds vanuit dat voor verschillende soorten bacteriën de overlevingsgrafieken rechte lijnen zijn indien de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft. Bij de grafiek hoort een formule van de vorm:

$N_t = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$



Figuur 3

Hierin is N_t het aantal bacteriën na t minuten en is r de sterftefactor. De sterftefactor is afhankelijk van het type bacteriën. Met behulp van de grafiek kun je berekenen dat de sterftefactor r van de Bacillus stearothermophilus ongeveer gelijk is aan 2,2.

a Toon dat met een berekening aan.

De D-waarde is de tijd in minuten die nodig is om het aantal bacteriën te reduceren tot 10% van het oorspronkelijke aantal. Net als de sterftefactor is de D-waarde afhankelijk van de soort bacteriën.

b Bereken voor de Bacillus stearothermophilus de D-waarde met behulp van bovenstaande formule en leg uit hoe je deze D-waarde kunt controleren met behulp van de figuur.

Men heeft ook van andere bacteriën de D-waarde bepaald. Voor de Clostridium botulinum is deze D-waarde gelijk aan 2,55 minuten. Met dit gegeven kunnen we de overlevingsgrafiek van de Clostridium botulinum tekenen. Ook voor deze overlevingsgrafiek beginnen we weer met 1 miljoen bacteriën.

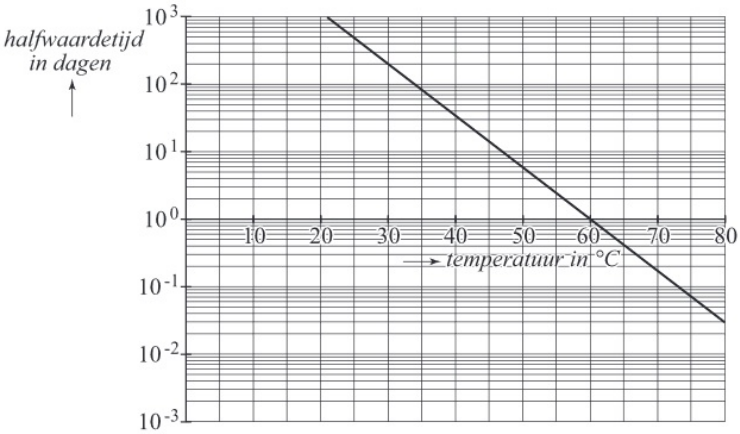
c Teken deze overlevingsgrafiek in de gegeven figuur op de **bijlage**. Licht je werkwijze toe.

(bron: examen wiskunde A1,2 vwo 2006, tweede tijdvak)

Opgave 11: Honing

Honing bestaat grotendeels uit vocht en suikers en voor een klein gedeelte uit andere stoffen, zoals enzymen en mineralen. De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym diastase: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het diastasegetal.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastasegetal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard. Een maat waarmee de afname van het diastasegetal kan worden weergegeven, is de zogeheten halfwaardetijd. Dat is de tijd waarin het diastasegetal wordt gehalveerd. Bekijk de grafiek waarin deze halfwaardetijd is uitgezet tegen de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.



Figuur 4

a Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de grafiek.

Het diastasegetal is bij de meeste soorten honing direct na winning niet hoger dan 30. Als het diastasegetal lager is dan 8, mag de honing alleen nog maar als bakkershoning worden verkocht. Een bepaald type honing heeft bij winning een diastasegetal van 28. Deze honing wordt gedurende drie jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C. Ga ervan uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

b Laat met behulp van de grafiek in zien dat deze honing na drie jaar bakkershoning is geworden.

Soms versuikert honing. Er ontstaan dan suikerkorrels op de bodem van een pot honing. Versuikerde honing wordt weer vloeibaar door de honing te verhitten. Uit de grafiek blijkt dat het diastasegetal wordt gehalveerd als honing 24 uur lang op een temperatuur van 60 °C wordt gehouden. Een partij honing met een diastasegetal van 27 wordt gedurende een bepaalde tijd op een temperatuur van 60 °C gehouden. Ga er nog steeds van uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

c Bereken hoelang het duurt totdat deze partij bakkershoning is geworden.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2008, eerste tijdvak)

Werkblad bij Opgave 10 op pagina 4.