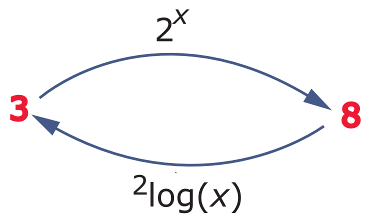
4.5 Logaritmische vergelijkingen

Inleiding

Onder andere bij het berekenen van nulpunten van functies ben je al vergelijkingen tegengekomen waarin logaritmen voorkomen. Uit de definitie volgt dat je vanuit een logaritme kunt terugrekenen door een exponentiële functie met hetzelfde grondtal te gebruiken. Hiermee kun je vergelijkingen met logaritmen oplossen. Soms gebruik je er ook de eigenschappen van logaritmen bij. Bij ongelijkheden moet je ook nog rekening houden met het domein van de logaritme!



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen en ongelijkheden met logaritmen oplossen;
- logaritmische functies herleiden naar exponentiële functies en omgekeerd.

Voorkennis

- werken met logaritmische functies;
- de eigenschappen van logaritmen gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

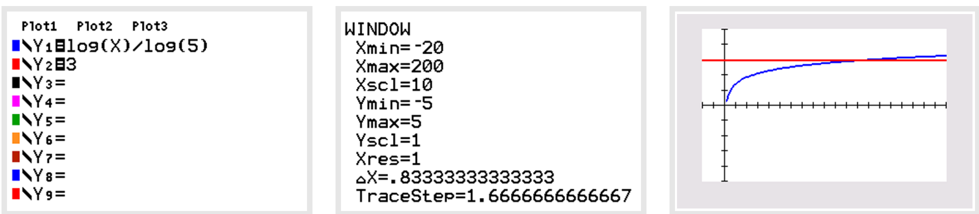
Los op: $^5\log(x) < 3$.

Uitleg

Los op: $^5\log(x) < 3$.

Zo'n ongelijkheid los je op met behulp van grafieken.

- Eerst los je de bijbehorende vergelijking $^5\log(x) = 3$ algebraïsch op door aan beide zijden een exponentiële functie met grondtal 5 toe te passen: $x = 5^3 = 125$.
- Vervolgens bekijk je de grafieken van $y_1 = {}^5\log(x)$ en $y_2 = 3$. Daarbij moet je vooral letten op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.
- De oplossing wordt: $0 < x < 125$.



Figuur 2

Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^2\log(x) + 16$.

a Plot de grafiek van f.

b Bepaal algebraïsch voor welke waarde van x geldt: $f(x) = 38$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot {}^2\log(x) + 16$.

De ongelijkheid $3 \cdot {}^2\log(x) + 16 \leq 38$ moet worden opgelost.

a Bepaal domein, bereik en asymptoot van f.

b Lees de oplossing van de ongelijkheid af uit de grafiek van f.

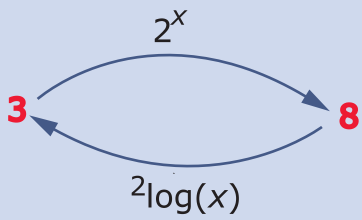
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de **logaritmische vergelijking** ${}^g\log(x) = a$ moet gelden:
$g > 0$ en $g \neq 1$ en $a > 0$.

De oplossing vind je als volgt:

$$\begin{aligned} {}^g\log(x) &= a \\ g^{{}^g\log(x)} &= g^a \\ x &= g^a \end{aligned}$$



Figuur 3

De **logaritmische ongelijkheid** ${}^g\log(x) < a$ los je als volgt op:

- Los de bijbehorende vergelijking ${}^g\log(x) = a$ op.
- Plot en bekijk de grafieken van $y_1 = {}^g\log(x)$ en $y_2 = a$.
- Lees de oplossing uit de grafiek af, waarbij je let op het domein (en de verticale asymptoot) van de logaritme.

Bij ingewikkelder vergelijkingen waarin meerdere logaritmen voorkomen, heb je vaak ook nog de eigenschappen van het optellen of aftrekken van logaritmen nodig.

Voorbeeld 1

Los op: $10 + 7 \cdot {}^3\log(x+1) \leq 45$.

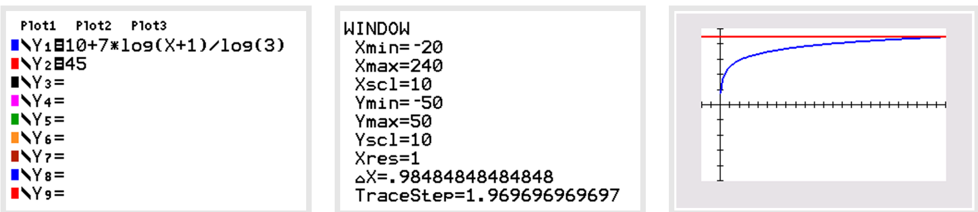
Antwoord

Plot de grafieken van $y_1 = 10 + 7 \cdot {}^3\log(x+1)$ en $y_2 = 45$ op de grafische rekenmachine. Bedenk vooraf voor de logaritmische functie dat het domein $\langle -1, \rightarrow\rangle$ is, met een verticale asymptoot $x = -1$. Bepaal hiermee en met $y_2 = 45$ de vensterinstellingen.

Los de bijbehorende vergelijking op.

$$\begin{aligned} 10 + 7 \cdot {}^3\log x + 1 &= 45 \\ {}^3\log(x+1) &= 5 \\ x + 1 &= 3^5 = 243 \\ x &= 242 \end{aligned}$$

Bekijk de grafiek en lees de oplossing af: $-1 < x \leq 242$.



Figuur 4

Opgave 3

Los op: $2 + 3 \cdot {}^{2}\log(x-4) \leq 11$

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^{0,5}\log(x+5)$.

a Los algebraïsch op: $f(x) = -3$

b Bepaal domein, bereik en de vergelijking van de asymptoot van f en teken de grafiek.

c Los op: $f(x) \geq -3$

Opgave 5

Plot met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(5-2x)$.

a Bepaal van beide functies het domein.

b Noteer van beide functies de vergelijking van de asymptoot.

c Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

d Los op: $f(x) > g(x)$

Voorbeeld 2

Los op: ${}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) = 3$.

Antwoord

Ga stap voor stap te werk.

$$\begin{aligned}
{}^{2}\log(x) + {}^{2}\log(x+2) &= 3 \\
{}^{2}\log(x(x+2)) &= 3 \\
x(x+2) &= 8 \\
x^2 + 2x - 8 &= 0 \\
(x-2)(x+4) &= 0 \\
x = -4 \vee x &= 2
\end{aligned}$$

logaritmen optellen

beide zijden een exponentiële functie met grondtal 2 toepassen

haakjes wegwerken en op 0 herleiden

ontbinden in factoren

oplossingen opschrijven

Vanwege het domein van een logaritme moet $x > 0$ en $x + 2 > 0$. Alleen $x = 2$ voldoet hier aan en dit is daarom de enige oplossing van de gegeven vergelijking.

Opgave 6

Los algebraïsch op.

${}^{6}\log(x) + {}^{6}\log(x-1) = 1$

Opgave 7

Los de vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch op.

a ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = 4$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) \leq 4$

c $-5 + 4 \cdot {}^{2}\log(x-2) = 11$

d $-5 + 4 \cdot {}^{2}\log(x-2) \leq 11$

e ${}^{3}\log(x-2) = 1 + 5 \cdot {}^{3}\log(2)$

f $\log(2x) - \log(x-1) = 2$

Voorbeeld 3

De effectieve geluidsdruk p (in pascal, 1 Pa = 1 Nm^{-2}, dus 1 newton per m^2) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer 0,00002 Pa, de pijngrens bij 200 Pa. Daarom voerde Alexander Graham Bell een praktischer grootheid in, het geluidsdrukniveau L uitgedrukt in decibel, dB.

Het verband tussen het geluidsdrukniveau L en de effectieve geluidsdruk p wordt gegeven door $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$.

Hierin is $p_0 = 0{,}00002$ Pa, de gehoorgrens.
Laat zien dat p een exponentiële functie van L is.

Antwoord

Herleid de gegeven formule naar de vorm $p = \ldots$

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

$p_0 = 0{,}00002$ invullen

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$$

beide zijden /20

$$\frac{L}{20} = \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$$

als $x = {}^{g}\log(y)$ dan $g^x = y$

$$10^{\frac{L}{20}} = \frac{p}{0{,}00002}$$

beide zijden ×0,00002

$$p = 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{L}{20}}$$

Omdat $10^{\frac{L}{20}} = \left(10^{\frac{1}{20}}\right)^L \approx 1{,}12^L$ kun je dit noteren als: $p \approx 0{,}00002 \cdot 1{,}12^L$. Inderdaad is p een exponentiële functie van L.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt de gegeven formule van de effectieve geluidsdruk herleid tot een exponentiële functie van de vorm $p = a \cdot g^L$.

a Voer zelf de herleiding uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

b Hoeveel bedraagt de effectieve geluidsdruk bij een geluidsdrukniveau van 20 dB?

c Hoeveel bedraagt het geluidsdrukniveau bij een effectieve geluidsdruk van 0,001 Pa?

Opgave 9

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt op een bepaalde plaats:

$h = -19 \log(p) + 57$

waarin:

- p de druk in hectopascal,
- h de hoogte in km boven zeeniveau is.

Je kunt deze formule herleiden naar de vorm $p = a \cdot g^h$.

a Laat zien, hoe dat gaat.

b Je kunt de formule ook de vorm $p = a \cdot 10^{k \cdot h}$ geven. Hoe ziet de formule er dan uit?

Verwerken

Opgave 10

Plot de grafiek van de functie: $f(x) = 1 - 3 \cdot \log(x)$

a Noteer het domein en het bereik van f.

b Los algebraïsch op: $f(x) < 0$.

Opgave 11

Plot de grafiek van de functie: $g(x) = -10 + 2 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(x-1)$

a Noteer het domein en het bereik van g.

b Los algebraïsch op: $g(x) \geq -14$

Opgave 12

Los algebraïsch op.

a ${}^{3}\log(x) = 2 \cdot {}^{3}\log(5)$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2)$

c $5 - {}^{2}\log(x) = 0$

d ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(3)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2-x)$

f ${}^{5}\log(x) = 3 + 4 \cdot {}^{5}\log(x)$

Opgave 13

Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = -1 + \log(4-x)$.

a Bepaal van beide functies het domein, het bereik en de asymptoot.

b Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

c Los op: $f(x) \leq g(x)$.

d Los op: $f(x) > g(x)$.

Opgave 14

Druk q uit in p:

a $p = 15 - {}^{3}\log(5-q)$

b $p = 600 + 15 \cdot \log\left(\frac{q}{200}\right)$

Opgave 15

De formule $t = {}^{0,8}\log\left(\frac{6000-N}{20}\right)$ is te herleiden tot een formule waarbij N een functie is van t.

Toon dat aan.

Toepassen

Opgave 16: Breedte van wegen

In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken. Daarom stelde Gerlough de zogenaamde veilige norm op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto's dat per uur passeert onder een maximum blijft. Dit maximum is N_{max} en het is afhankelijk van de breedte van de weg. Gerlough beperkte zich in zijn onderzoek tot wegen met een breedte tussen 2 meter en 9 meter. Hij kwam tot de volgende formule:

$N_{\text{max}} = \frac{8289{,}3}{B} \cdot (1{,}778 - \log(B))$

In deze formule is B de breedte van de weg in meters. Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model is enig inzicht te krijgen in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

a Over een weg passeren in de spits 800 auto's per uur. Bereken in decimeters nauwkeurig hoe breed deze weg ten hoogste mag zijn zonder dat de veilige norm wordt overschreden.

Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto's mogen passeren dan bij een smalle weg. De grafiek van N_{max} moet dus dalend zijn. De formule voor N_{max} moet hiermee in overeenstemming zijn.

b Leg uit hoe je uitsluitend aan de hand van de formule voor N_{max} – dus zonder gebruik van de grafische rekenmachine – kunt beredeneren dat hier sprake is van een dalende functie.

Een weg die voldoet aan de veilige norm, wordt 0,50 meter breder gemaakt. Volgens de formule neemt N_{max} daardoor met 126 af.

c Onderzoek met behulp van de grafische rekenmachine hoe breed de weg oorspronkelijk was. Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.

(bron: examen wiskunde A1,2 in 2005, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 17

Los algebraïsch op:

a ${}^{7}\log(x-5) = 0$

b ${}^{0{,}25}\log(x) = -{}^{0{,}25}\log(5)$

c ${}^{4}\log(x) = 0{,}5 - {}^{4}\log(3)$

d ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) + {}^{\frac{1}{2}}\log(2x) = 0$

Opgave 18

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = {}^{3}\log(2x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(6-x)$.

a Bepaal domein, bereik en de asymptoot van beide functies.

b Bereken voor welke x geldt $f(x) = -2$.

c Los algebraïsch op: $f(x) > 9$.

d Bereken voor welke x geldt $g(x) = 0$.

e Los algebraïsch op: $f(x) = g(x)$.

f Los algebraïsch op: $f(x) \geq g(x)$.

Opgave 19

De formule $k = 4 \cdot \log\left(\frac{D+10}{100}\right) + 5$ is zo te herschrijven dat D een exponentiële functie is van k.

Toon dat aan.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met logaritmen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.