4.4 Logaritmische functies

Inleiding

Logaritmen ontstaan als inverse bewerking van exponentiële functies. Ook met logaritmen kun je functievoorschriften maken. Het prototype is de functie $f(x) = {}^{g}\log(x)$. Alle functies die hieruit door de bekende transformaties kunnen ontstaan noem je logaritmische functies. En die ga je nu bekijken...

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische functies te werken;
- de karakteristieken van logaritmische functies te bepalen.

Voorkennis

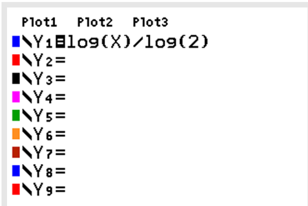
- werken met exponentiële functies;
- transformaties van functies toepassen;
- werken met logaritmen.

Verkennen

Opgave V1

Op je grafische rekenmachine kun je de grafiek van $f(x) = {}^{2}\log(x)$ in beeld brengen.

Je voert dan in: $y_1 = \frac{\log(x)}{\log(2)}$ of $y_1 = \log_2(x)$.



Figuur 1

a Breng de grafiek in beeld. Welk domein en welk bereik heeft de functie?

b Welke asymptoot heeft de grafiek van f?

c Bekijk de tabel met je GR. Bij welke waarden van x krijg je gehele functiewaarden?

Uitleg

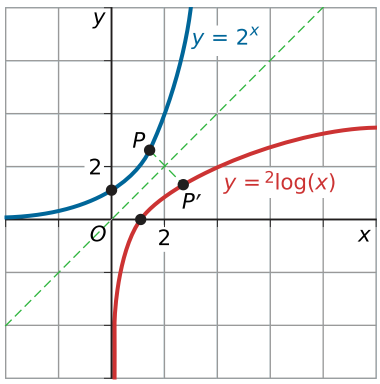
Bekijk de applet.

Je ziet hier de grafieken van $y_1 = 2^x$ en van $y_2 = {}^{2}\log(x)$.

Beide grafieken zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Dat komt omdat uit $y = 2^x$ volgt $x = {}^{2}\log(y)$ en om de grafiek van y_2 te krijgen, moet je x en y verwisselen.

De karakteristieken van een logaritmische functie zijn daarom af te leiden uit die van de bijbehorende exponentiële functie door x en y te verwisselen. Beide functies $y = g^x$ en $y = {}^{g}\log(x)$ zijn elkaars terugrekenfunctie.



Figuur 2

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^{2}\log(x)$.

a Plot beide grafieken op de grafische rekenmachine.

b Het punt (4,2) ligt op de grafiek van y_2. Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?

c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1.

d Welk verband bestaat er tussen het bereik van y_1 en het domein van y_2?

e Welke asymptoot heeft y_2?

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1.
Geef het domein, het bereik en de asymptoot van de functie y_2.

Theorie en voorbeelden

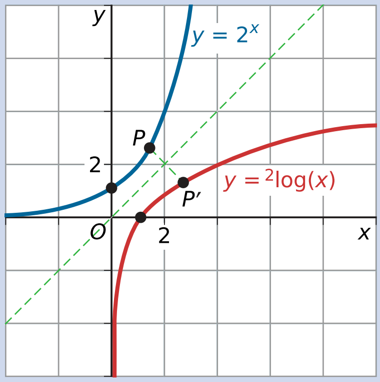
Om te onthouden

Bekijk de applet.

Een functie zoals $f(x) = {}^g\log(x)$ heet een **logaritmische functie**.
Er moet gelden: $g > 0$ en $g \neq 1$.

De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^g\log(x)$ zijn elkaars terugrekenfunctie en dus elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$. De karakteristieken van $y = {}^g\log(x)$ zijn daarom af te leiden uit die van $y = g^x$:

- het domein is $D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$
- het bereik is $B_f = \mathbb{R}$ (alle reële getallen) ofwel $\langle\leftarrow, \rightarrow\rangle$
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- het snijpunt met de x-as (nulpunt) vind je door op te lossen: ${}^g\log(x) = 0$
- de y-as ($x = 0$) is de verticale asymptoot van de grafiek



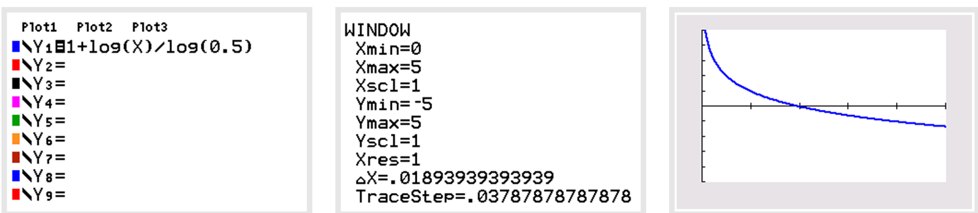
Figuur 3

Alle functies die door verschuiven en/of herschalen uit $y = {}^g\log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.

Voorbeeld 1

Gegeven is de logaritmische functie $f(x) = 1 + {}^{0,5}\log(x)$.
Hoe ontstaat de grafiek van $f(x)$ uit die van $y = {}^{0,5}\log(x)$?
Geef de karakteristieken van deze functie en plot de grafiek.

Antwoord



Figuur 4

- De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = {}^{0,5}\log(x)$ door deze 1 eenheid in de y-richting te verschuiven.
- Omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt, is de grafiek dalend.
- Verder moet $x > 0$, hieruit volgt $D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$.

- De verticale asymptoot is $x = 0$, de grens van het domein.
- Het snijpunt met de x-as (nulpunt):

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 1 + {}^{0,5}\log(x) &= 0 \\ {}^{0,5}\log(x) &= -1 \\ x &= 0{,}5^{-1} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Het snijpunt met de x-as is $(2,0)$.

Opgave 3

Maak de grafiek van de functie $f(x) = 2 + {}^{3}\log(x)$.

a Schrijf het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f op.

b Voor welke waarde van x is $f(x) = 0$?

c Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 0$?

d Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 0$?

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = {}^{0,5}\log(x + 5) + 1$.

a Door welke verschuiving en/of herschaling ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{0,5}\log(x)$?

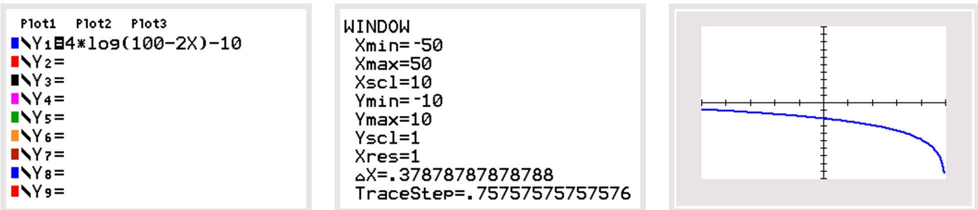
b Bepaal de asymptoot, het domein en het bereik van f.

c Bereken het nulpunt van f.

Voorbeeld 2

Gegeven is de logaritmische functie $f(x) = 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10$.
Hoe ontstaat de grafiek van $f(x)$ uit die van $y = \log(x)$?
Geef de karakteristieken van deze functie en plot de grafiek.

Antwoord



Figuur 5

- De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \log(x)$ door herschalen met $-\frac{1}{2}$ in de x-richting, vervolgens -100 verschuiven in de x-richting, daarna herschalen met 4 in de y-richting en ten slotte -10 verschuiven in de y-richting.

Door de grote getallen is het verstandig om systematisch de karakteristieken te zoeken:

- $100 - 2x > 0$ geeft: $D_f = \langle \leftarrow, 50 \rangle$.
  Hiermee bepaal je de vensterinstellingen van de grafische rekenmachine voor de x-as.
- De verticale asymptoot is $x = 50$, de grens van het domein.
- Het bereik is $B_f = \mathbb{R}$, want deze functie kan ontstaan uit $y = \log(x)$, de standaard 10-logaritme.

Plot de grafiek.

- Het snijpunt met de x-as (nulpunt):

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 4 \cdot \log(100 - 2x) - 10 &= 0 \\ \log(100 - 2x) &= 2{,}5 \\ 100 - 2x &= 10^{2{,}5} \\ -2x &= 10^{2{,}5} - 100 \\ x &= \frac{10^{2{,}5} - 100}{-2} \\ x &\approx -108{,}11 \end{aligned}$$

Het snijpunt met de x-as is ongeveer $(-108{,}11; 0)$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**. Plot de grafiek van de functie $f(x) = -20 + 3 \cdot {}^{2}\log(x + 40)$.

a Door welke verschuivingen en/of herschaling ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{2}\log(x)$?

b Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f.

c Bereken het nulpunt van f. Rond af op één decimaal.

Opgave 6

Gegeven is de functie $f(x) = -2 + 2 \cdot {}^{0,3}\log(x - 1)$. Plot de grafiek.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f.

b Door welke verschuiving en/of herschaling ontstaat de grafiek van f uit die van $y = {}^{0,3}\log(x)$?

c Bereken algebraïsch het nulpunt van f.

Verwerken

Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{5}\log(x)$ en $g(x) = 5^x$.

a Voor welke waarde van x is $f(x) = 3$?

b Voor welke waarde van x is $g(x) = 125$?

c In welke lijn zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld?

d Het punt $\left(\frac{1}{25}, -2\right)$ op de grafiek van f heeft een spiegelbeeld op de grafiek van g.
Geef de coördinaten van dit spiegelbeeld.

Opgave 8

Plot de grafieken van de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log(x)$.

a Voor welke waarde van x is $f(x) = 3$?

b Voor welke waarde van x is $g(x) = -3$?

c Het punt $\left(\frac{1}{8}, 3\right)$ op de grafiek van f heeft een spiegelbeeld op de grafiek van g.
Geef de coördinaten van dit spiegelbeeld.

d Geef nog een punt op de grafiek van f en het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van g.

e Plot de grafieken van f en g in één figuur en los op: $f(x) = g(x)$

Opgave 9

Plot de grafiek van de functie $f(x) = -1 + 3 \cdot \log(x+4)$.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functie f.

b Door welke verschuivingen en/of herschaling ontstaat de grafiek van f uit die van $y = \log(x)$?

c Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van f.

Opgave 10

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^2\log(2-x)$.

a Bepaal het domein, het bereik en de asymptoot van de functies f en g.

b Beschrijf hoe de grafiek van g door verschuiving en herschaling uit die van f kan ontstaan.

c Plot de grafiek van de functies f en g en los op: $f(x) = g(x)$

d In welke lijn zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld?

Opgave 11

Lichtgevoeligheid van de sensor van een fototoestel wordt uitgedrukt in een gevoeligheidsgetal. Het meest gebruikte systeem hiervoor is het ISO-systeem (International Standards Organisation). Op filmrolletjes (ouderwets...) staat meestal ook een ander gevoeligheidsgetal vermeld, de DIN-waarde. Het verband tussen ISO en DIN wordt gegeven door de formule

$y = 1 + a \cdot \log(x)$

Hierin geeft x de lichtgevoeligheid in ISO aan en y de lichtgevoeligheid in DIN. Een sensor die staat ingesteld op 100 ISO heeft een DIN-waarde 21.

Figuur 6

a Bereken a.

b Maak de grafiek. De meest gangbare sensors hebben een ISO-waarde tussen 50 en 6400.

c Wat is de ISO waarde van een sensor met een gevoeligheid van 31 DIN?

Toepassen

Opgave 12: Touchscreen

Bij het ontwerpen van touchscreens (aanraakschermen) voor moderne media als tablets en mobiele telefoons besteedt men veel aandacht aan het gebruiksgemak. Gebruikers willen immers snel kunnen navigeren. Bekijk de afbeelding van een touchscreen met een menu dat bestaat uit dertien knoppen. De tijd die je nodig hebt om in een menu de juiste knop te vinden, hangt mede af van het aantal knoppen in het menu. Volgens de psycholoog Hick kun je deze benodigde tijd T berekenen met de formule: $T(n) = b \cdot {}^2\log(n+1)$.

Hierbij is T de tijd in seconden, n het aantal knoppen in het menu en b een positieve constante die afhangt van de behendigheid van de gebruiker.


Figuur 7

a Om de juiste knop te vinden op het touchscreen van de foto heeft Irene 8 seconden nodig. Bereken met de formule van Hick haar waarde van b in één decimaal.

Pim is veel handiger met een touchscreen dan zijn vader. Hij kan in een menu met 16 knoppen even snel de juiste knop vinden als zijn vader in een menu met 4 knoppen. Dit betekent dat zijn b-waarde (b_p) kleiner is dan de b-waarde van zijn vader (b_v).

b Onderzoek of dit betekent dat de b-waarde van Pim precies half zo groot is als die van zijn vader.

Sommige gebruikers vinden een menu met veel knoppen onoverzichtelijk. Daarom deelt men een menu soms op in submenu's met minder knoppen. Als er bijvoorbeeld in totaal achttien knoppen zijn, kan de ontwerper ervoor kiezen om:

methode I: één menu van achttien knoppen te maken

of

methode II: een menu met drie knoppen te maken, waarbij na elk van de drie mogelijke keuzes weer een submenu met zes knoppen verschijnt.

De gebruiker wint hiermee overzichtelijkheid, want hij weet nu precies in welk submenu hij moet zoeken, maar hij verliest tijd doordat hij twee keer (in een menu) de juiste knop moet zien te vinden. Als $b = 0{,}9$ duurt het keuzeproces bij methode II minstens 0,5 seconden langer dan bij methode I.

c Toon met behulp van de formule voor $T(n)$ aan dat dit juist is.

Uit de formule van Hick volgt dat één menu met alle knoppen altijd sneller werkt dan een opdeling in submenu's. Dus één menu met $p \cdot q$ knoppen is altijd sneller dan een hoofdmenu met p knoppen, gevolgd door p submenu's met elk q knoppen.

d Neem $b = 1$ en toon aan dat $T(p) + T(q)$ altijd groter is dan $T(p \cdot q)$.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2014, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 13

Gegeven zijn de functies f en g met voorschriften $f(x) = 2 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$ en $g(x) = {}^{3}\log(x - 2)$.

a Bepaal domein, bereik en asymptoot van f en teken de grafiek van f.

b Hoe kan de grafiek van f ontstaan uit die van $y = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$?

c Bepaal domein, bereik en asymptoot van g en teken de grafiek van g.

d Hoe kan de grafiek van g ontstaan uit die van $y = {}^{3}\log(x)$?

e Los op in drie decimalen nauwkeurig: $f(x) = g(x)$.

Opgave 14

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = k \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2{,}4$ (in één decimaal nauwkeurig).

a Mark (8 jaar) woont in Nederland en heeft een lengte van 1,30 m en weegt 26,3 kg. Bereken k in gehelen nauwkeurig. Neem aan dat Mark wat lengte en gewicht betreft een gemiddeld Nederlands kind is.

b Helen is 1,40 m lang. Schat haar gewicht in kg.

Practicum: Logaritmische functies

Met deze applet maak je logaritmische functies van de vorm $y = a \cdot {}^{g}\log(b(x - c)) + d$.
Verzin eerst zo'n functie (neem de waarden van a, b, c en d niet te groot), bedenk hoe hij kan ontstaan uit $y = {}^{g}\log(x)$ en wat de karakteristieken zijn. Controleer dan je antwoord met de applet.

Bekijk de applet.

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.