

4.3 Logaritmische schaal

Inleiding

Exponentiële groei is vaak ook nogal explosieve groei. Vaak heb je al snel te maken met veel grotere getallen dan waarmee je begon. Dat is lastig bij het maken van grafieken waaruit je met enige nauwkeurigheid wilt kunnen aflezen. Het lukt bijna niet om in één grafiek zowel de (kleine) beginwaarden als de (hele grote) waarden na verloop van tijd te laten zien.

Er is echter speciaal grafiekenpapier bedacht om dit probleem op te lossen. Het is zo gemaakt, dat een grafiek van een exponentiële functie er op dit papier als een rechte lijn uitziet.

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische schalen te werken;
- logaritmisch grafiekenpapier te gebruiken;
- het voorschrift van een exponentiële functie op te stellen vanaf enkellogaritmisch papier.

Voorkennis

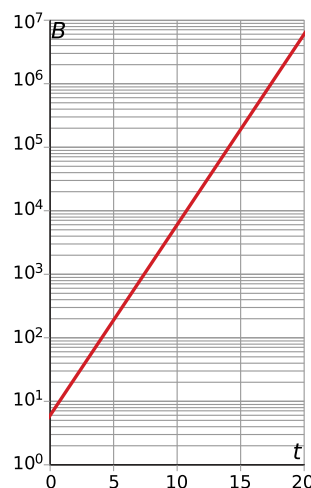
- werken met exponentiële functies;
- werken met logaritmen.

Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Hier zie je een grafiek van B als functie van t . Op de verticale as is een bijzondere schaalverdeling gebruikt.

- Wat is er voor bijzonder aan die schaalverdeling?
- Teken zelf eens zo'n schaalverdeling op de verticale as en maak de grafiek van B als functie van t .



Figuur 1

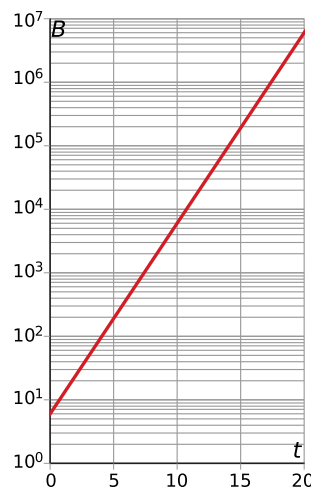
Uitleg

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur. Bekijk de grafiek van B als functie van t . Op de B -as is een zogenaamde logaritmische schaalverdeling gebruikt.

In plaats van een lineaire verdeling zoals 0, 1, 2, 3, 4, enzovoort, zet je dan de machten van 10 neer: 10^0 , 10^1 , 10^2 , 10^3 , 10^4 enzovoort.

Om de uitkomsten voor B op de juiste plek te zetten, gebruik je een 10-logaritme. Bijvoorbeeld op $t = 12$ heb je $B = 6 \cdot 2^{12} = 24576$ bacteriën. Dat getal ligt tussen 10^4 en 10^5 . De logaritme van dat getal is: $\log(24576) \approx 4,39$. Je zet het daarom op 4,39 eenheden boven de horizontale as, bij $10^{4,39}$ dus.

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal.



Figuur 2

Opgave 1

Als je voor de grafiek van de exponentiële functie $B(t) = 6 \cdot 2^t$ op de B -as een speciale (logaritmische) schaalverdeling gebruikt, ziet de grafiek eruit als een rechte lijn, zie de **Uitleg**.

- a Zijn op deze schaalverdeling de afstanden tussen twee maatstreepjes steeds even groot?
- b Laat zien dat de punten die horen bij $B(5)$ en $B(10)$ goed zijn getekend.

In feite staat op de verticale as de waarde van B op de plek van $\log(B)$. Neem maar eens een gewoon stuk roosterpapier en maak een assenstelsel met $\log(B)$ uitgezet tegen t .

- c Maak eerst een tabel van $\log(B)$ afhankelijk van t .
- d Zet de bijbehorende punten in een assenstelsel. Als het goed is, krijg je een rechte lijn als grafiek.
- e Met de eigenschappen van logaritmen kun je laten zien dat $\log(B)$ ook echt een lineaire functie van t is. Toon aan dat $B = 6 \cdot 2^t$ is te herleiden tot $\log(B) = \log(2) \cdot t + \log(6)$.

Opgave 2

Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

- a Maak een grafiek van $\log(y)$ uitgezet tegen x . Neem x van 0 tot 15.
- b Vervang de getallen op de verticale as door de bijbehorende y -waarden. Je krijgt dan weer een grafiek van y als functie van x , maar nu met een logaritmische schaal op de verticale as.
- c Lees uit de laatste grafiek af hoe groot $f(10)$ is en controleer het antwoord met het gegeven functievoorschrift.
- d Laat zien dat $\log(y)$ een lineaire functie van x is.

Theorie en voorbeelden

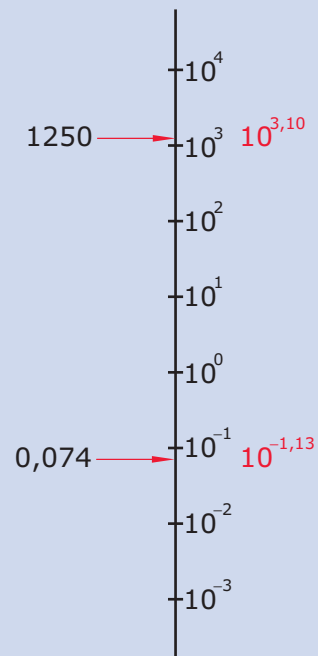
Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** zet je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar uit. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen in dezelfde schaalverdeling plaatsen. Met behulp van de **10-logaritme** ([LOG] op je rekenmachine) kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3,10$ dus $1250 \approx 10^{3,10}$.
Je plaatst 1250 dus op 3,10 eenheden boven 10^0 , net boven 10^3 .
- $\log(0,074) \approx -1,13$ dus $0,074 \approx 10^{-1,13}$.
Je plaatst 0,074 dus op 1,13 eenheden onder 10^0 , net onder 10^{-1} .

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie altijd een rechte lijn. In Excel kun je gemakkelijk grafieken maken met een logaritmische schaal. Er bestaat ook speciaal **enkellogaritmisch papier**.

Omdat elke rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat en om een bijpassende formule op te stellen.



Figuur 3

Voorbeeld 1

Laat zien hoe je op een logaritmische schaal de getallen 7250 en 0,002 aan kunt geven. Laat ook zien, hoe je af kunt lezen welke waarden a en b hebben.

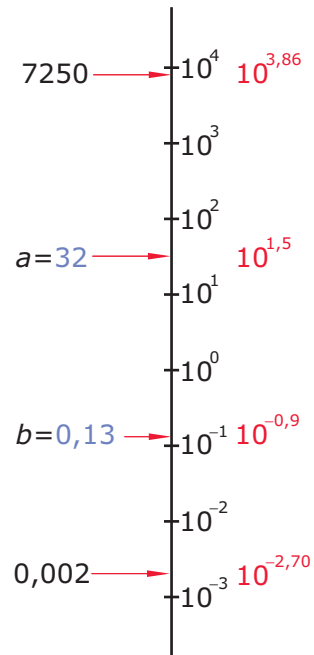
Antwoord

Eerst 7250 en 0,002 omrekenen:

- $\log(7250) \approx 3,86$ dus $7250 \approx 10^{3,86}$. Je plaatst 7250 dus op 3,86 eenheden boven 10^0 , dat is tussen 10^3 en 10^4 .
- $\log(0,002) \approx -2,70$ dus $0,002 \approx 10^{-2,70}$. Je plaatst 0,002 dus op 2,70 eenheden onder 10^0 , dat is tussen 10^{-2} en 10^{-3} .

Nu aflezen:

- $a \approx 10^{1,5} \approx 32$
- $b \approx 10^{-0,9} \approx 0,13$



Figuur 4

Opgave 3

Je weet nu hoe je getallen kunt plaatsen op een logaritmische schaal en hoe je van zo'n schaal waarden kunt aflezen. Teken zelf zo'n logaritmische schaal.

- Geef de getallen 20, 20000 en 0,02 op deze schaal aan.
- Gebruik deze schaal om groottes te vergelijken. Begin met een mens van 1,80 m groot. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.
- De Mount Everest is ongeveer 8,884 km hoog. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.
- Een amoëbe is een eencellig organisme met een afmeting van 0,003 tot 0,8 millimeter. Geef deze getallen op je schaalverdeling aan.
- Op je schaalverdeling is a het getal dat midden tussen 10^3 en 10^4 in zit. Bereken a in gehele nauwkeurig.

Opgave 4

Maak zelf een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling, of gebruik een blad enkellogaritmisch papier. Gegeven is de functie $N(t) = 12000 \cdot 0,8^t$.

- Teken de grafiek van $N(t)$ in jouw assenstelsel (of op het enkellogaritmische papier).
- Toon met behulp van de eigenschappen van logaritmen aan dat er tussen $\log(N)$ en t een lineair verband bestaat.

Opgave 5

Elk verband van de vorm $y = b \cdot g^x$ kan worden geschreven als $\log(y) = \log(g) \cdot x + \log(b)$.

- Leg uit dat dit betekent dat elke exponentiële functie op enkellogaritmisch papier een rechte lijn als grafiek heeft.
- Het omgekeerde geldt ook: als $\log(y) = a \cdot x + b$, dan is y een exponentiële functie van x . Hoe bewijs je dat?

Voorbeeld 2

Bekijk de grafiek van de groei van waterplanten. De oppervlakte A (m^2) is een functie van de tijd t (weken). Stel een bijpassende formule op.

Antwoord

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband tussen A en t , en wel: $A = b \cdot g^t$.

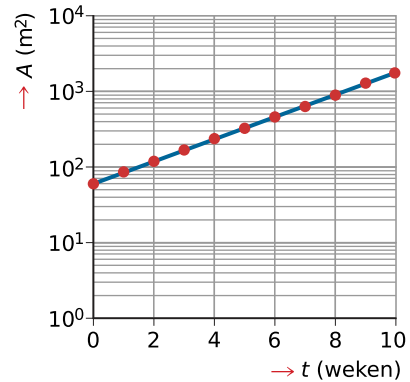
Uit de figuur lees je af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 60$, dus $b \approx 60$;
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 900$.

De groeifactor per acht weken is ongeveer $\frac{900}{60}$.

De groeifactor per week is ongeveer $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1,40$.

Je vindt dus: $A(t) \approx 60 \cdot 1,40^t$.



Figuur 5

Opgave 6

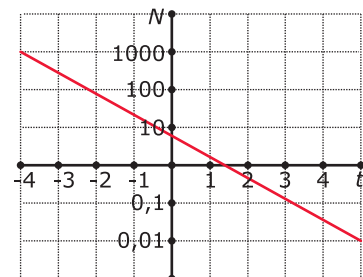
In **Voorbeeld 2** staat een rechte lijn in een assenstelsel waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft. Daar kun je een functievoorschrift bij opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

- Lees de waarden voor A bij $t = 2$ en $t = 10$ af.
- Stel met behulp van deze waarden $A(t)$ op.
- Waarom is het handiger om de waarde bij $t = 0$ te gebruiken?

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie $N(t)$.

- Welke coördinaten heeft het snijpunt van de twee assen?
- Lees twee waarden voor $N(t)$ uit de grafiek af en stel een formule op voor $N(t)$.
- Bereken ter controle met die formule het snijpunt met de getekende t -as.
- Waarom heeft het geen zin om te vragen naar de oplossingen van $N(t) = 0$?



Figuur 6

Voorbeeld 3

De effectieve geluidsdruk p (pascal, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) is een maat voor de druk op je trommelvlies. De waarden van p variëren echter nogal: de gehoordrempel ligt bij ongeveer $0,00002 \text{ Pa}$, de pijngrens bij 200 Pa . Daarom voerde Alexander Graham Bell een praktischere grootheid in, het geluidsdrukkniveau L uitgedrukt in decibel (dB). Het verband tussen L en p wordt gegeven door $L = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$. Hierin is $p_0 = 0,00002 \text{ Pa}$.

Hoe groot is de effectieve geluidsdruk van een rijdende scooter (75 dB)? Hoeveel dB bedraagt het geluidsdrukkniveau van twee van die scooters?

Antwoord

Voor de rijdende scooter geldt: $L = 75$ en dus $75 = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0,00002}\right)$.

Hieruit volgt:

$$\frac{75}{20} = \log\left(\frac{p}{0,00002}\right)$$

$$10^{\frac{75}{20}} = \frac{p}{0,00002}$$

$$p = 0,00002 \cdot 10^{\frac{75}{20}} \approx 0,1125$$

Heb je twee van die rijdende scooters, dan is hun totale effectieve geluidsdruk ongeveer $2 \cdot 0,1125 = 0,2250$ Pa. Daarbij hoort een geluidsdrukniveau van ongeveer

$$L = 20 \cdot \log\left(\frac{0,2250}{0,00002}\right) \approx 81 \text{ dB.}$$

Opgave 8

Bekijk de formule van het geluidsdrukniveau L (dB) afhankelijk van de effectieve geluidsdruk p (pascal, Pa) in **Voorbeeld 3**.

- Leg uit, waarom een decibelschaalverdeling eigenlijk een logaritmische schaal is.
- In een bibliotheek is het erg rustig met een geluidsdrukniveau van ongeveer 35 dB. Hoeveel bedraagt daar de effectieve geluidsdruk?
- Je loopt op de stoep, het autoverkeer levert een geluidsdrukniveau van ongeveer 55 dB. Iemand zet opeens een elektrische drillboor aan van 95 dB. Hoeveel bedraagt het totale geluidsdrukniveau op dat moment?
- Als het geluidsdrukniveau tijdens een concert toeneemt van 110 naar 130 dB, hoeveel keer zo groot wordt dan de effectieve geluidsdruk?

Verwerken

Opgave 9

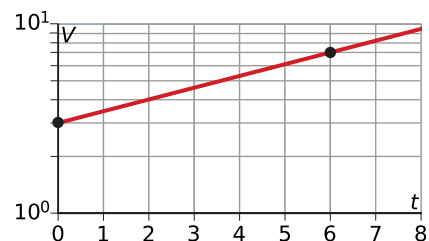
De bevolking van een middelgrote stad groeit vanaf 1 januari 2010 met (ongeveer) 6% per jaar. Op 1 januari 2010 zijn er 80000 inwoners.

- Stel een formule op voor het aantal inwoners A afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010.
- Teken op enkellogaritmisch papier de grafiek van $A(t)$ en schat daarmee het aantal inwoners op 1 januari 2025. Controleer je antwoord door berekenen.

Opgave 10

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een toenemende hoeveelheid V als functie van de tijd t .

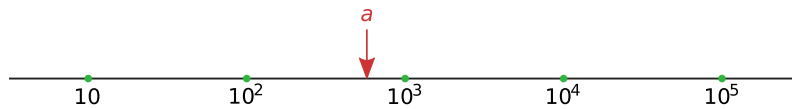
- Geef een formule voor $V(t)$.
- Bereken de waarde van t waarvoor $V(t) = 5$. Rond af op twee decimalen. Controleer je antwoord met de grafiek.
- Voor negatieve waarden van t heeft de grafiek een snijpunt met de t -as. Bereken de bijbehorende waarde van t . Rond af op twee decimalen.



Figuur 7

Opgave 11

Lees het getal a af op deze logaritmische schaal.



Figuur 8

Opgave 12

Bekijk de tabel met gegevens over een bacteriecultuur. t is gegeven in uren, en $N(t)$ in aantallen.

t (uur)	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 1

- Teken de bijbehorende grafiek op enkellogaritmisch papier.
- Is er sprake van exponentiële groei?
- Stel een formule op voor N als functie van t .

Opgave 13

De batterij van een laptop verliest bij gebruik ongeveer 6% per uur aan batterijduur. Als er nog maar voor 10% aan batterij is, geeft de laptop een waarschuwing dat de batterij opgeladen moet worden.

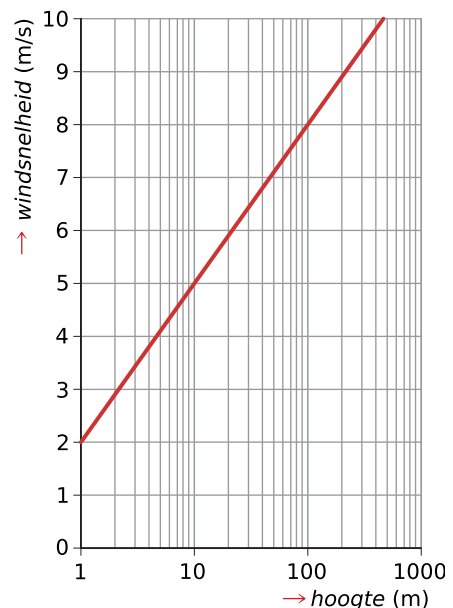
- Stel een formule op voor het resterende acculadingspercentage P van de accu na u uren gebruik, als je uitgaat van een volle batterij.
- Bereken hoelang je de laptop kunt gebruiken voordat je een melding krijgt dat de batterij opgeladen moet worden. Geef je antwoord in uren.
- Laat zien, dat de grafiek van P afhankelijk van u op enkellogaritmisch papier een rechte lijn is.

Toepassen

Opgave 14: Windsnelheid

De windsnelheid neemt toe met de hoogte. De windsterkte is onder meer afhankelijk van de ruwheid van het terrein en de stabiliteit van de atmosfeer. In de grafiek zijn de resultaten weergegeven van metingen op dagen met een neutrale atmosfeer.

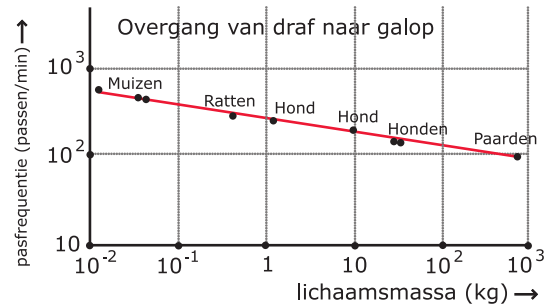
Het verband tussen de windsnelheid w en de hoogte h kan worden geschreven in de vorm $w = a \cdot \log(h) + b$. Toon met een berekening aan dat $a = 3$ en $b = 2$.



Figuur 9

Opgave 15: Pasfrequentie afhankelijk van lichaamsmassa

Bekijk de grafiek. Je ziet voorbeelden van zoogdieren die bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) overgaan van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt, hangt af van de lichaamsmassa (kg). Noem de lichaamsmassa m (kg) en de pasfrequentie P . De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.



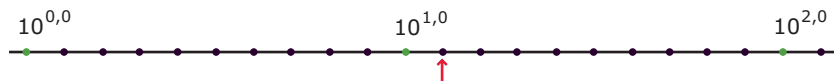
Figuur 10

- Omdat op beide assen een logaritmische schaal is gebruikt, is in feite $\log(P)$ uitgezet tegen $\log(m)$. Voor het punt dat hoort bij paarden geldt dan ongeveer $\log(m) = 2,9$ en $\log(P) = 2,0$. Bepaal zelf de bijpassende waarden van het punt dat bij een kleine hond hoort.
- Leid nu een formule af voor $\log(P)$ als functie van $\log(m)$.
- Met behulp van de eigenschappen van logaritmen kun je nu een formule afleiden voor P als functie van m . Laat zien hoe dat gaat.

Testen

Opgave 16

Teken een getallenlijn met een logaritmische schaalverdeling (neem deze figuur over).



Figuur 11

- Welk getal hoort bij het pijltje?
- Teken een pijltje dat hoort bij het getal 2.
- Geef aan waar 55 en waar $10^{0,5}$ moeten staan.
- Geef ook $3\frac{1}{4}$ en $10^{\frac{1}{4}}$ aan.

Opgave 17

Bij een biologisch experiment groeit in een vijver een waterplant. De waterplant bedekt een steeds groter deel van het oppervlak. Elke week meet men de oppervlakte die de waterplant bedekt. De meetwaarden staan in de tabel.

aantal weken	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte (dm ²)	40	57	89	134	200	305	447


Tabel 2

- Zet de punten $(0,40), (1,57), \dots, (6,447)$ uit op enkellogaritmisch papier.
- Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.
- Van welk type groei is hier sprake? Waar zie je dat aan?
- Stel een formule op voor de oppervlakte die de waterplant bedekt, afhankelijk van de tijd t in weken.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
