4.2 Eigenschappen

Inleiding

Je hebt nu wel het begrip logaritme leren kennen als oplossing van een exponentiële vergelijking, maar nog geen methode gezien om willekeurige logaritmen rechtstreeks te bepalen (benaderen) met de rekenmachine.
Er zit wel een functie [LOG] op, maar daarmee kun je nog niet op alle rekenmachines voor elk willekeurig grondtal de logaritme van een getal vinden. Je hebt de eigenschappen van logaritmen nodig. Die ga je nu nader bekijken.

Je leert in dit onderwerp

- eigenschappen van logaritmen gebruiken;
- logaritmen berekenen met de grafische rekenmachine;
- exponentiële en logaritmische vergelijkingen algebraïsch oplossen.

Voorkennis

- werken met het begrip logaritme;
- logaritmen bepalen vanuit exponentiële vergelijkingen.

Verkennen

Opgave V1

Je weet dat $g^x = y$ gelijkwaardig is met $x = {}^{g}\log(y)$. Dat levert alvast twee eigenschappen van logaritmen op.

a Hoe volgt hier uit dat ${}^{g}\log(g^x) = x$?

b Welke andere eigenschap volgt hier rechtstreeks uit?

c Wat gebeurt er als je twee logaritmen optelt, is ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a+b)$?

Uitleg 1

Voor het saldo S op een spaarrekening t jaar na een eenmalige storting van € 4000,00 en een jaarlijkse rente van 5% geldt: $S(t) = 4000 \cdot 1{,}05^t$.

De tijd die nodig is om het saldo te verdubbelen vind je door de vergelijking $1{,}05^t = 2$ op te lossen.

De verdubbelingstijd is $t = {}^{1,05}\log(2)$ jaar.

De tijd die nodig is om het saldo te verdrievoudigen vind je door de vergelijking $1{,}05^t = 3$ op te lossen.

De verdrievoudigingstijd is $t = {}^{1,05}\log(3)$ jaar.

De verzesvoudigingstijd vind je door de verdubbelingstijd en de verdrievoudigingstijd op te tellen:
${}^{1,05}\log(2) + {}^{1,05}\log(3) = {}^{1,05}\log(6) = {}^{1,05}\log(2 \cdot 3)$
Dit maakt deze eigenschap van de logaritme aannemelijk:

- ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$

Op soortgelijke wijze verklaar je de eigenschap:

- ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$

De grondtallen moeten gelijk zijn om logaritmen op te mogen tellen of van elkaar af te mogen trekken.

De verachtvoudigingstijd van het saldo is $t_8 = {}^{1,05}\log(8)$.
De verachtvoudigingstijd vind je ook door drie keer de verdubbelingstijd te nemen:
$3 \cdot {}^{1,05}\log(2) = {}^{1,05}\log(8) = {}^{1,05}\log\left(2^3\right)$
Dit past bij de eigenschap:

- $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$

Opgave 1

In **Uitleg 1** zie je in welke tijd een saldo verdubbelt dan wel verdrievoudigt.

a Hoe lang duurt het voor het saldo 2 keer zo groot (dus € 8000) geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme op één decimaal nauwkeurig.

b Hoe lang duurt het voor het saldo 3 keer zo groot geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme op één decimaal nauwkeurig.

c Hoe lang duurt het voor het saldo 6 keer zo groot geworden is? Schrijf het antwoord als logaritme. Bereken deze logaritme op één decimaal nauwkeurig.

d Het antwoord bij a kun je krijgen door het antwoord bij b van dat bij c af te trekken. Controleer dit en geef een verklaring.

e Bij d heb je een voorbeeld van een eigenschap van logaritmen die in **Uitleg 1** staat vermeld. Om welke eigenschap gaat het hier?

Opgave 2

Bij exponentiële afname komt het begrip halveringstijd voor.

a Geef een omschrijving van het begrip halveringstijd. Maak hierbij gebruik van een logaritme.

b Bereken in maanden nauwkeurig de halveringstijd in het geval een hoeveelheid jaarlijks met 7% afneemt.

c De radioactieve stof Strontium heeft een halveringstijd van 28 jaar. Bereken in drie decimalen nauwkeurig de groeifactor per jaar.

Uitleg 2

Het kost veel tijd om ${}^{2}\log(100)$ te berekenen door $2^x = 100$ op te lossen met de grafische rekenmachine. Het kan ook anders. De rekenmachine kent een knop logaritme, die werkt met grondtal 10. Het is daarom handig als je van grondtal kunt veranderen.

Ga uit van $2^x = 100$.

$$\begin{aligned} 2^x &= 100 \\ {}^{10}\log(2^x) &= {}^{10}\log(100) \\ x \cdot {}^{10}\log(2) &= {}^{10}\log(100) \\ x &= \frac{{}^{10}\log(100)}{{}^{10}\log(2)} \end{aligned}$$

neem aan beide zijden de ${}^{10}\log$

eigenschap: $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$

beide zijden delen door ${}^{10}\log(2)$

Dit is een andere manier om ${}^{2}\log(100)$ te noteren:

$${}^{2}\log(100) = \frac{{}^{10}\log(100)}{{}^{10}\log(2)}$$

Nu kan een ${}^{2}\log$ worden berekend met een ${}^{10}\log$ op de grafische rekenmachine:

$${}^{2}\log(100) = \frac{\log(100)}{\log(2)} \approx 6{,}64$$

Daarbij hoef je geen grondtal in te vullen, want de rekenmachine werkt met grondtal 10.

Dit werkt ook voor andere grondtallen. In het algemeen geldt:

- ${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$

De meeste rekenmachines hebben ook de mogelijkheid om het grondtal van de logaritme direct in te voeren. Vaak moet je dan de Amerikaanse notatie $\log_g(x)$ gebruiken. Je ziet dat daarin het grondtal een andere plaats krijgt.

Opgave 3

a Bereken ${}^{3}\log(300)$ op de manier van **Uitleg 2**.

b Je kunt zelf nagaan welk grondtal door de logknop van de rekenmachine wordt gebruikt. Bereken daartoe $\log(10)$. Welk grondtal gebruikt te rekenmachine dus standaard?

Opgave 4

Bereken in één decimaal.

a ${}^{5}\log(90)$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(20)$

c ${}^{4}\log\left(\frac{1}{3}\right)$

d ${}^{0{,}1}\log(300)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een definitie van **logaritme** is:
$x = {}^{g}\log(y)$ is de oplossing van $g^{x} = y$.

Let op! Controleer of, en zorg dat bij gebruik van de logaritme ${}^{g}\log(y)$ geldt:
$0 < g < 1$ of $g > 1$ en $y > 0$.

Logaritmen hebben **eigenschappen** of **rekenregels**.

- ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$
- ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- $p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^{p})$
- ${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$

Opmerking 1: je kunt door de laatste regel ${}^{g}\log(a)$ met de logaritmetoets op de rekenmachine berekenen. De meeste rekenmachines hebben ook de mogelijkheid om het grondtal van de logaritme direct in te voeren. Vaak moet je dan de Amerikaanse notatie $\log_{g}(x)$ gebruiken. Daarin krijgt het grondtal een andere plaats.

Opmerking 2: het grondtal 10 wordt vaak weggelaten: ${}^{10}\log(a) = \log(a)$.

Voorbeeld 1

De eigenschappen van logaritmen stellen je in staat met logaritmen te rekenen. Bijvoorbeeld:

- ${}^{6}\log(24) + 2 \cdot {}^{6}\log(3) = {}^{6}\log(24) + {}^{6}\log\left(3^{2}\right) = {}^{6}\log\left(24 \cdot 3^{2}\right) = {}^{6}\log(216) = 3$
- ${}^{2}\log(12) + {}^{0{,}5}\log(12) = {}^{2}\log(12) + \frac{{}^{2}\log(12)}{{}^{2}\log(0{,}5)} = {}^{2}\log(12) - {}^{2}\log(12) = 0$ want ${}^{2}\log(0{,}5) = {}^{2}\log\left(2^{-1}\right) = -1$
- ${}^{2}\log(7) \cdot {}^{7}\log(8) = \frac{\log(7)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(8)}{\log(7)} = \frac{\log(8)}{\log(2)} = {}^{2}\log(8) = 3$
- $2^{{}^{2}\log(7)} = 7$

Opgave 5

Gebruik de eigenschappen van logaritmen om te laten zien dat de uitdrukkingen waar zijn en controleer ze daarna door de logaritmen uit te rekenen.

a ${}^{2}\log(16) + {}^{2}\log(8) = {}^{2}\log(128)$

b ${}^{2}\log(16) - 3 \cdot {}^{2}\log(2) = {}^{2}\log(2)$

c ${}^{\frac{1}{2}}\log(16) = -{}^{2}\log(16)$

d ${}^{2}\log(80) + {}^{0{,}5}\log(5) = 4$

Opgave 6

Bereken met behulp van de eigenschappen van logaritmen.

a ${}^{2}\log(72) - 2 \cdot {}^{2}\log(3)$

b ${}^{2}\log(80) + {}^{0{,}5}\log(5)$

Schrijf als één logaritme.

c ${}^{2}\log(7) + {}^{3}\log(81)$

d $0{,}5 \cdot {}^{2}\log(36) - 1$

Voorbeeld 2

Los de vergelijking ${}^{2}\log(x) = 3$ op.

Antwoord

Gebruik de regel dat de logaritme de terugrekenfunctie van een exponentiële functie met hetzelfde grondtal is. Neem aan beide zijden de exponentiële functie met grondtal 2. Dit geeft:

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(x) &= 3 \\ 2^{{}^{2}\log(x)} &= 2^3 \\ x &= 2^3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a ${}^{5}\log(x) = 2$

b ${}^{4}\log(2x) = 0$

c ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(x^2\right) = -4$

d ${}^{2}\log(\sqrt{x}) = 5$

Voorbeeld 3

Los de vergelijking $\log(x) + \log(2x) = 3$ op.

Antwoord

Bij het oplossen van dergelijke vergelijkingen gebruik je de eigenschappen van logaritmen:

$$\begin{aligned} \log(x) + \log(2x) &= 3 \\ \log\left(2x^2\right) &= 3 \\ 2x^2 &= 10^3 = 1000 \\ x &= -\sqrt{500} \vee x = \sqrt{500} \end{aligned}$$

gebruik ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$

terugrekenen vanuit een 10-logaritme

Omdat je geen logaritme uit een negatief getal kunt trekken, is er maar één oplossing mogelijk: $x = \sqrt{500}$.

Opgave 8

Los op.

a $\log(5x) + \log(x) = 1$

b $\log(4) - \log(5x) = 2$

Verwerken

Opgave 9

Bereken en gebruik indien nodig de grafische rekenmachine. Rond in dat geval af op drie decimalen.

a ${}^{5}\log(625)$

b ${}^{2}\log(100)$

c ${}^{8}\log(8000)$

d $\log(40) + \log(25)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log(0{,}0003)$

f ${}^{7}\log\left(\sqrt{7}\right)$

Opgave 10

Gebruik de eigenschappen van logaritmen om te berekenen.

a $\log(5) + \log(20)$

b ${}^{5}\log(100) - {}^{5}\log(4)$

c $2 \cdot {}^{6}\log(3) + {}^{6}\log(4)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(45) - {}^{\frac{1}{3}}\log(5)$

Opgave 11

Er staat een bedrag van € 2600,00 op de bank. De rente bedraagt 2% per jaar.
Bepaal de verdubbelingstijd.

Opgave 12

Los op. Rond indien nodig af op één decimaal.

a $10 \cdot 5^{x} = 0{,}16$

b ${}^{4}\log(x+1) = 3$

c $\log(8x) + \log(x) = 3$

d $\log(2x) - 2 \cdot \log(x) = 1$

Opgave 13

Een hoeveelheid groeit exponentieel met groeipercentage p.

Toon aan dat de verdubbelingstijd T wordt gegeven door $T = \frac{\log(2)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$.

Toepassen

Opgave 14: Radioactiviteit

Een radioactieve stof vervalt volgens de formule:
$N(t) = N(0) \cdot 0{,}89^t$
N is de hoeveelheid in milligram en t de tijd in jaren.

a Bereken de halveringstijd.

b Een laboratorium heeft 800 mg van deze stof. Bereken met behulp van de halveringstijd hoelang het duurt voordat deze hoeveelheid minder dan 50 mg is geworden.

c Bereken tot op een maand nauwkeurig hoelang het duurt voordat 60 mg van deze stof minder dan 15 mg is geworden.

Opgave 15: Halfwaardetijd

Bij radioactieve stoffen wordt in plaats van het woord halveringstijd vaak het woord halfwaardetijd gebruikt. In een laboratorium bevindt zich 800 g van het radioactieve natrium-24. Deze stof heeft een halfwaardetijd van 15 uur.

a Laat zien hoe lang het duurt tot er nog maar 100 g van het natrium-24 over is.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

c Bereken tot op een kwartier nauwkeurig hoe lang het duurt tot er van de 800 g natrium-24 nog maar 160 g over is.

Testen

Opgave 16

Iemand koopt een huis voor € 200.000 en verwacht dat de waarde van het huis per jaar 10% zal stijgen.

a Hoe lang duurt het voordat het huis € 300.000 waard is? Schrijf het antwoord als logaritme en bereken die logaritme tot op de maand nauwkeurig.

b Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis twee keer zo groot is geworden?

c Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis drie keer zo groot is geworden?

d Hoe lang duurt het voordat de waarde van het huis zes keer zo groot is geworden? Laat zien hoe je dit kunt berekenen met behulp van de antwoorden bij b en c.

e Hoe kun je het antwoord van vraag d in één keer berekenen?

Opgave 17

Een suikerpatiënt moet zich een injectie met insuline toedienen op het moment dat er nog maar een derde deel van de vorige injectie insuline in zijn bloed zit. De hoeveelheid insuline in het bloed neemt per uur met 8% af.

Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende injecties? Schrijf de oplossing als logaritme en geef een benadering in uren nauwkeurig.

Opgave 18

Omstreeks 1650 groeide de wereldbevolking met een percentage van 0,3 % per jaar.

Schrijf de verdubbelingstijd als logaritme en geef een benadering in gehele jaren.

Opgave 19

Los algebraïsch op:

a $600 \cdot 0{,}5^t = 20$

b ${}^5\log(1 - x) = 2$

c ${}^2\log\left(3x^2\right) = 5$

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.