4.1 Logaritmen

Inleiding

Bij exponentiële verbanden zoals die bij bijvoorbeeld bacteriegroei optreden moet je soms vragen beantwoorden als: 'Op welk tijdstip heb je 1000 bacteriën?'
Daarbij ontstaan vergelijkingen waarin exponentiële functies voorkomen. Die kun je nog niet algebraïsch oplossen. Je kunt alleen oplossingen zoeken (vaak benaderen) met de grafische rekenmachine. In dit onderwerp leer hoe je logaritmen kunt gebruiken om dergelijke vergelijkingen wel algebraïsch op te lossen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip logaritme kennen;
- logaritmen berekenen, uit het hoofd waar dat kan;
- logaritmen schatten;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met de grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 6 \cdot 2^t$ met t in uren.

Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 1000 bacteriën?

Figuur 1

Uitleg

Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje na t uur geldt $B = 6 \cdot 2^t$.
Na hoeveel tijd zijn er 120 bacteriën?

Om deze vraag te beantwoorden moet je de vergelijking $6 \cdot 2^t = 120$, ofwel $2^t = 20$, oplossen. Zo'n vergelijking kun je al oplossen met de grafische rekenmachine, je vindt dan $t \approx 4{,}322$.
De exacte oplossing schrijf je als $t = {}^{2}\log(20)$.
Dit heet de logaritme van 20 voor het grondtal 2.

Een oplossing van een exponentiële vergelijking schrijf je als een logaritme. Omdat exponentiële functies ofwel altijd stijgend (bij een grondtal groter dan 1) ofwel altijd dalend (bij een grondtal tussen 0 en 1) zijn, heeft een vergelijking als $g^x = a$ precies één oplossing: $x = {}^{g}\log(a)$ als $a > 0$.
Deze oplossing kun je vinden door $g^x = a$ met de grafische rekenmachine op te lossen.

Opgave 1

Neem de vergelijking $2^t = 30$.

a Geef de oplossing van deze vergelijking. Rond af op twee decimalen.

b Hoe schrijf je die oplossing als logaritme?

c Als de hoeveelheid bacteriën gegeven wordt door $h = 2^t$, met t in uren, na hoeveel uur heb je dan 100 bacteriën? Geef je oplossing als logaritme, maar ook afgerond op twee decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

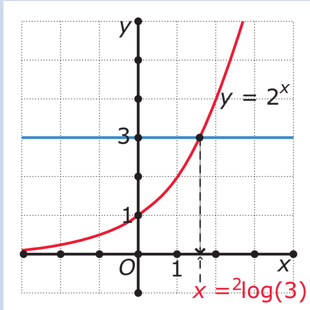
Bekijk de applet: Logaritme

De oplossing van de vergelijking $g^x = a$ heet de **logaritme** van a voor grondtal g. Notatie: $x = {}^g\log(a)$.
Omdat deze vergelijking alleen oplossingen heeft als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en als $a > 0$, bestaat ${}^g\log(a)$ alleen onder deze voorwaarden. Vooralsnog bepaal je $x = {}^g\log(a)$ meestal door de vergelijking $g^x = a$ met de grafische rekenmachine op te lossen.

In het algemeen wordt als definitie van logaritme gebruikt:

- uit $g^x = y$ volgt $x = {}^g\log(y)$;
- uit $x = {}^g\log(y)$ volgt $g^x = y$.

De uitdrukkingen $x = {}^g\log(y)$ en $g^x = y$ zijn volledig gelijkwaardig als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en als $y > 0$.
Je noemt de exponentiële functie en de logaritme met hetzelfde grondtal wel inverse (tegengestelde) bewerkingen, ze zijn elkaars terugrekenbewerkingen.



Figuur 2

Voorbeeld 1

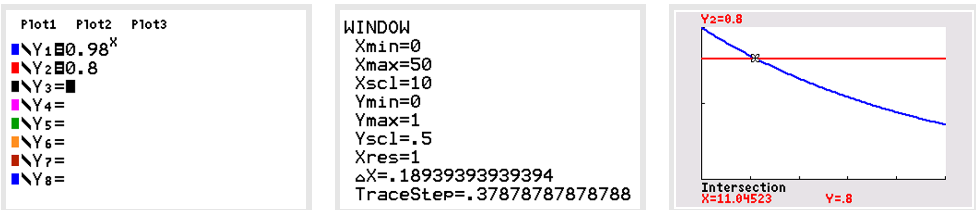
Luchtschepen zijn gevuld met gas dat regelmatig aangevuld moet worden om voldoende draagvermogen te houden. Een luchtschip met een inhoud van 3000 m^3 verliest elke tien dagen ongeveer 2% van zijn gas. Als er minder dan 2400 m^3 over is, kan het niet meer vliegen.
Hoeveel dagen nadat het geheel is gevuld, is dit het geval?

Figuur 3

Antwoord

De hoeveelheid gas in het luchtschip is $G(t) = 3000 \cdot 0{,}98^t$ met G in m^3 en t in eenheden van tien dagen.

De vraag kun je vertalen naar het oplossen van: $3000 \cdot 0{,}98^t < 2400$.
De bijbehorende vergelijking is: $3000 \cdot 0{,}98^t = 2400$.
Na delen door 3000 levert dit op: $0{,}98^t = 0{,}8$.
Met de intersect-functie van de grafische rekenmachine vind je: $t \approx 11{,}04$. De oplossing van de vergelijking is daarom: $t = {}^{0{,}98}\log(0{,}8) \approx 11{,}04$.



Figuur 4

Het luchtschip kan 110 dagen vliegen zonder bijvullen. Op de 111^e dag kan het niet meer vliegen.

Opgave 2

Na hoeveel dagen is de beginhoeveelheid gas van 3000 m^3 in het luchtschip verminderd tot 2800 m^3 als er elke tien dagen ongeveer 2% vervliegt?

a Welke vergelijking moet je oplossen?

b Je kunt de vergelijking eerst vereenvoudigen. Wat krijg je?

c Schrijf nu de oplossing van de vergelijking als logaritme.

d Geef het antwoord ook afgerond op twee decimalen.

Opgave 3

Geef de oplossingen van de vergelijkingen. Schrijf het antwoord als logaritme en bereken (zo nodig) in drie decimalen nauwkeurig.

a $2^x = 7$

b $3^x = 81$

c $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

d $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0{,}01$

Voorbeeld 2

Soms kun je van een logaritme zelf (zonder rekenmachine) de uitkomst bedenken:

- ${}^{2}\log(16)$ is de oplossing van $2^t = 16 = 2^4$. Dus ${}^{2}\log(16) = 4$.
- ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\right)$ is de oplossing van $\left(\frac{1}{9}\right)^t = 3 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$. Dus ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\right) = -2$.
- ${}^{10}\log(10000) = 4$, want $10^4 = 10000$.
- ${}^{10}\log(0{,}001) = -3$, want $10^{-3} = 0{,}001$.
- ${}^{3}\log\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right) = -1\frac{1}{2}$, want $3^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$.
- ${}^{\frac{1}{2}}\log(8) = -3$, want $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

Opgave 4

Bereken de logaritmen exact.

a ${}^{5}\log(125)$

b ${}^{5}\log\left(\frac{1}{25}\right)$

c ${}^{4}\log(64)$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log(64)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$

f ${}^{2}\log\left(\sqrt{2}\right)$

Voorbeeld 3

Je kunt de grootte van een logaritme schatten met behulp van machten van het grondtal:

- ${}^{2}\log(40)$ is een getal tussen 5 en 6, want $2^5 = 32$ en $2^6 = 64$.
- ${}^{10}\log(400)$ is een getal tussen 2 en 3, want $10^2 = 100$ en $10^3 = 1000$.
- ${}^{10}\log(0{,}05)$ is een getal tussen -2 en -1, want $10^{-2} = 0{,}01$ en $10^{-1} = 0{,}1$.
- ${}^{0{,}5}\log(20)$ is een getal tussen -5 en -4, want $0{,}5^{-5} = 32$ en $0{,}5^{-4} = 16$.

Opgave 5

Geef van de logaritmen aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen ze liggen.

a ${}^{5}\log(150)$

b ${}^{10}\log(758)$

c ${}^{2}\log(60)$

d ${}^{2}\log\left(\frac{1}{7}\right)$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(20)$

f ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{5}\right)$

Opgave 6

Bereken de logaritmen en rond af op één decimaal.

a ${}^{5}\log(150)$

b ${}^{10}\log(758)$

c ${}^{2}\log(60)$

d ${}^{2}\log\left(\frac{1}{7}\right)$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log(20)$

f ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{5}\right)$

Opgave 7

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme maar ook afgerond op één decimaal.

a $5 \cdot 3^{x} = 3000$

b $1{,}7^{t} = 525$

c $572 \cdot 0{,}6^{t} = 30$

Opgave 8

Iemand zet op 1 januari 2014 een kapitaal van € 10000,00 op de bank tegen een vaste rente van 8% per jaar.

In welke maand van welk jaar is dit kapitaal uitgegroeid tot € 15000,00 als hij niets opneemt of bijstort? Gebruik bij de berekening een logaritme.

Verwerken

Opgave 9

Welke van de logaritmen zijn eenvoudig zonder rekenmachine te berekenen? Bereken deze logaritmen. Bereken ook de overige logaritmen en rond af op één decimaal.

a ${}^{4}\log(64)$

b ${}^{4}\log(400)$

c ${}^{\frac{1}{3}}\log(60)$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(81)$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$

f ${}^{0{,}1}\log(1000000)$

Opgave 10

Bereken en rond af op drie decimalen.

a $^{2,5}\log(100)$

b $^{0,7}\log(20)$

c $^{2,3}\log(0{,}05)$

d $^{15,2}\log(2{,}3)$

Opgave 11

Geef bij de logaritmen steeds aan tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen ze liggen.

a $^{6}\log(30)$

b $^{3}\log(70)$

c $^{\frac{1}{2}}\log(10)$

d $^{\frac{1}{3}}\log(0{,}01)$

Opgave 12

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme, maar ook afgerond op één decimaal.

a $10 \cdot 10^x = 0{,}1$

b $0{,}5 \cdot 2^x = 30$

c $54 \cdot 0{,}8^t = 27$

Opgave 13

Schrijf de oplossingen van de vergelijkingen als logaritme, maar ook afgerond op twee decimalen.

a $15 \cdot 0{,}4^x + 7 = 52$

b $17 \cdot 4^x + 9 = 400$

c $15 \cdot 2^x - 3 = 0$

Opgave 14

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdrievoudigd. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

Toepassen

Opgave 15: Geldwaarde van huizen

Iemand koopt op 1 juli 2014 een huis van € 250.000. In de krant heeft hij gelezen dat de afgelopen vijftig jaar de waarde van de huizen gemiddeld met 7% per jaar gestegen is.
Neem aan dat de waardestijging elk jaar hetzelfde was.

a Hoeveel bedroeg de waarde van het huis op 1 juli 1995?

b Hoeveel jaar geleden was het huis € 200.000 waard? Schrijf je antwoord als een logaritme en benader het daarna in jaren nauwkeurig.

c Bereken ook hoeveel jaar geleden het huis nog € 50.000 waard was. Schrijf het antwoord als een logaritme.

Testen

Opgave 16

Bereken de volgende logaritmen exact.

a ${}^{2}\log\left(\sqrt{32}\right)$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(27)$

Opgave 17

Geef bij de volgende logaritmen eerst aan tussen welke opeenvolgende gehele getallen ze liggen. Geef daarna een benadering in drie decimalen.

a ${}^{2}\log(513)$

b ${}^{0,4}\log(25)$

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

a $6 \cdot 4^{x} = 35$

b $1050 \cdot 1{,}08^{t} = 1800$

Opgave 19

In een tank zit 150 liter verontreinigde vloeistof. Deze vloeistof wordt verwijderd door spoelen met water. Hierdoor verdwijnt elke keer 15% van de vloeistof. Men wil stoppen met spoelen als er minder dan 10 liter verontreinigde vloeistof over is.

Bereken hoe vaak men moet spoelen. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering van deze logaritme.