3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Exponentiële functies**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- exponentiële groei en groeifactor — macht, grondtal, exponent
- negatieve exponenten — gebroken exponenten
- eigenschappen van machten
- exponentiële functie — exponentiële vergelijking/ongelijkheid
- verschuiven en herschalen — horizontale asymptoot van een exponentiële functie

Activiteitenlijst

- bij exponentiële groei de groeifactor bepalen en een formule maken — rekenregels voor machten gebruiken
- eigenschappen van machten met negatieve en/of gebroken exponenten gebruiken — grafieken maken bij exponentiële groei
- werken met de eigenschappen en rekenregels van machten
- de karakteristieken van een exponentiële functie bepalen — exponentiële vergelijkingen/ongelijkheden oplossen
- werken met de algemene gedaante van elke exponentiële functie

Achtergronden


Figuur 1

Thomas Robert Malthus (1766–1834) was een Brits geestelijke die zich veel bezighield met demografische en economische vraagstukken. In 1798 publiceerde hij ‘An Essay on the Principle of Population’, waarin hij aannam dat de totale bevolking exponentieel groeit, terwijl de middelen van bestaan lineair toenemen. Dit leidt tot de beschikbaarheid van steeds minder grond (voedsel/energie) per mens en dus een daling in welvaart, de ‘Malthusiaanse catastrofe’. Op grond hiervan meende hij dat de totale bevolking een maximale omvang zou hebben, het ‘Malthusiaans plafond’. Hij veronderstelde dat de mensheid deze maximale omvang binnen afzienbare tijd zou bereiken en dat alleen middels hongersnood, epidemieën en oorlogen het aantal mensen binnen de grenzen van het Malthusiaans plafond zou kunnen blijven. Malthus geldt als één der eerste economen.

In de tweede helft van de negentiende eeuw werd deze opinie fel bestreden, onder andere door Karl Marx en Friedrich Engels die in Malthus' catastrofe slechts een gevolg van de kapitalistische samenleving zagen. Ook economen als John Maynard Smith en Ronald Fisher trokken Malthus' pessimistische kijk in twijfel. In de twintigste eeuw heeft niets van een Malthusiaanse catastrofe plaatsgevonden. Wel verscheen in 1972 het ‘De grenzen aan de groei’. Dit is een geschrift van de **Club van Rome** die als doelstelling heeft de wereld bekend te maken met problemen als bevolkingsgroei, voedselproductie, industrialisatie, uitputting van natuurlijke hulpbronnen, vervuiling. Ook zij maakten veel gebruik van exponentiële groeimodellen.

Testen

Opgave 1

Los de ongelijkheden op. Rond af op twee decimalen.

a $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 50 < 25$

b $500 \cdot 1{,}5^x > 300 \cdot 2^x$

Opgave 2

Los algebraïsch op.

a $-35 + 5 \cdot 3^{x-5} = 100$

b $5 \cdot 2^{2x-4} = 10\sqrt{2}$

Opgave 3

Het aantal passagiers dat jaarlijks gebruikmaakt van een vliegveld groeit enkele jaren met 2% per jaar. In 2018 maakten 43000 passagiers gebruik van het vliegveld.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?

b Geef een formule voor het aantal passagiers p op tijdstip t in jaren na 2018.

c Als de groei zo doorgaat, hoelang duurt het dan voor het huidige aantal passagiers verdubbeld is?

d Hoeveel passagiers waren er in 2015?

e Hoeveel bedraagt de groeifactor per tien jaar?

f Hoe groot is de groeifactor per kwartaal?

Opgave 4

Een doorzichtige kunststof absorbeert een deel van het licht dat er doorheen valt. Elke laag van 1 cm absorbeert 20% van het licht.

a Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per cm kunststof?

b Hoeveel procent van het licht wordt geabsorbeerd door een laag van 2,5 cm dikte?

c Hoe dik moet de laag kunststof zijn om 90% van het licht te absorberen?

d Met welke factor wordt de hoeveelheid licht vermenigvuldigd per mm kunststof?

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} - 240$.

a Schrijf functie f in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

b Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $y = 3^x$?

c Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f?

d Bereken het nulpunt van f in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Iemand haalt een fles melk uit de koelkast en zet er een fles cola voor in de plaats. De temperatuur van de fles melk neemt hierdoor langzaam toe tot kamertemperatuur, de temperatuur van de fles cola neemt juist af tot koelkasttemperatuur. De formules voor de temperaturen T_1 en T_2 (in graden Celsius) in de flessen, afhankelijk van de tijd t (in minuten), zijn: $T_1 = 19 - 13 \cdot 0{,}78^t$ en $T_2 = 6 + 13 \cdot 0{,}78^t$.

a Teken met de grafische rekenmachine de grafieken van beide formules. Laat t hierbij lopen van 0 tot 25.

b Welke van de formules hoort bij de fles melk, en welke bij de fles cola? Licht je antwoord toe.

c Wat is de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles cola?

d Welke asymptoot heeft de grafiek van de temperatuur van de fles melk?

e Hoeveel bedraagt de kamertemperatuur?

f Vanaf welk tijdstip is de cola kouder dan de melk?

Toepassen

Opgave 7: Radioactief verval

Een natuurkundige toepassing van exponentiële functies vind je bij radioactiviteit.

Radioactiviteit is een eigenschap van bepaalde instabiele zeer zware metalen. Bekende voorbeelden zijn radium en uranium. Het gaat daarbij om stoffen waarvan de atoomkern straling (in de vorm van bepaalde deeltjes) uitzendt. Soms is deze straling schadelijk voor leven. Een voorbeeld is U-238, een isotoop van uranium die door het uitstoten van α-deeltjes (deeltjes die bestaan uit twee protonen en twee neutronen) wordt omgezet in thorium, Th-234. Uranium is een metaal dat in de natuur voorkomt, ruim 98% daarvan is U-238. De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid om te zetten in thorium. De halfwaardetijd van U-238 is ongeveer $4{,}468 \cdot 10^9$ jaar. Het verval van U-238 gebeurt exponentieel, dus de hoeveelheid H is een functie van de tijd t. Begin je met 1 kg U-238, dan heb je na 4,468 miljard jaar nog 0,5 kg over (plus 0,5 kg Th-234). Je kunt dus het beste de tijd in miljarden jaren nemen, de groeifactor is dan ongeveer 0,8563. En $A = 1000 \cdot 0{,}8563^t$ gram.

Het element radium-228 is radioactief. Het vervalt tot het niet-radioactieve radium-224. Van een willekeurige hoeveelheid radium-228 wordt in één jaar 10% omgezet in radium-224. Een laboratorium heeft in het jaar 2001 1000 mg radium-228.

a Geef een formule van R, de hoeveelheid radium-228 in mg, op tijdstip t in jaren.

b Bereken hoe lang het duurt (tot op een maand nauwkeurig) totdat er van de 1000 mg radium-228 nog 800 mg over is.

c Bij radioactieve stoffen zijn scheikundigen vaak geïnteresseerd in de halveringstijd. Bereken de halveringstijd van radium-228.

d Als je de halveringstijd weet kun je overzien hoe snel het verval gaat. Schat met behulp van de halveringstijd hoe lang het duurt tot 750 mg radium-228 is omgezet in radium-224.

Opgave 8: Wereldbevolking

Omstreeks 1970 bedroeg de wereldbevolking ongeveer 3,6 miljard en zij groeide per jaar met 2,1%.

a Hoe groot was toen de groeifactor?

b Als we ervan uitgaan dat die groeifactor door de jaren heen gelijk is gebleven, hoeveel mensen leefden er dan in 1971, 1988, 1900 en het jaar 0?

c B is de bevolking na t jaren, gerekend vanaf 1970 ($t = 0$). Geef B als functie van t door een formule.

d Je hebt nu een model van de bevolkingsgroei gemaakt, gebaseerd op gegevens uit 1970. Volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 is in 2050 het aantal mensen op aarde nog geen 9 miljard. Klopt dat met de formule die je bij b hebt gevonden?

e Waaraan kun je zien dat de bevolkingsgroei dan niet meer exponentieel loopt? Kun je daar redenen voor geven?

Opgave 9: Vissen in het Grevelingenmeer

De afsluiting van de Grevelingen had voor de visstand grote gevolgen. Om die gevolgen in kaart te brengen werden wiskundige modellen ontwikkeld. Onder andere voor de ontwikkeling van de scholpopulatie. Hiervoor werd o.a. het volgende model opgesteld:

- jaarlijks komen er 5 miljoen larven het Grevelingenmeer binnen;
- jaarlijks komen 200000 volwassen schollen (één jaar of ouder) het Grevelingenmeer binnen;
- 90% van die larven sterven als jonge vissen (dus voordat ze 1 jaar zijn);
- 33% van de volwassen vissen sterven jaarlijks.

Op grond hiervan kun je een tabel maken van het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer:

tijd t in jaar	0	1	2	3	4	5
aantal volwassen schollen N	200.000	833.333	1.255.556	1.537.037	1.724.691	1.849.794

Tabel 1

Zet je deze tabel voort, dan zul je zien dat het aantal volwassen schollen in dit model naar 2100000 nadert. Bij de tabel past de formule: $N(t) = 2{,}1 - 1{,}9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$ met N in miljoenen. Dat kun je zelf afleiden...

a Laat zien hoe uit het model de gegeven tabel kan worden afgeleid.

b Zet die tabel voort en laat zien dat het aantal volwassen schollen in het Grevelingenmeer volgens dit model de 2.100.000 gaat benaderen.

c Leid nu zelf de gegeven groeifunctie af.

d Waarom wordt in dit geval wel gesproken van geremde groei?

Examen

Opgave 10: Ureumgehalte

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 gram toeneemt. Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo ververst worden dat de wettelijke norm van 2 gram ureum per m^3 water niet overschreden wordt. In een model gaan we er van uit dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 ververst wordt (dus 3% van het totaal). We beginnen de eerste dag met 0 gram ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 gram ureum in het water. Na verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 gram ureum over.

a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 gram ureum in het water zit.

b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.

Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.

c Stel U is de hoeveelheid ureum aan het begin van een zekere dag. Toon aan dat de hoeveelheid ureum aan het begin van de daaropvolgende dag gelijk is aan $0{,}8U + 400$.

We starten in het model weer met 0 gram ureum aan het begin van de eerste dag. De hoeveelheid ureum in gram (U_n) aan het begin van de n-de dag kan rechtstreeks berekend worden met de formule: $U_n = 2000 - 2500 \cdot 0{,}8^n$

d Leg uit met behulp van deze formule dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm voldaan wordt.

e In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(bron: examen wiskunde A havo 1991, eerste tijdvak)

Opgave 11: Sparen, sparen en sparen

Nederland is een echt spaarland. Jaarlijks worden er miljarden euro's gestort op spaarrekeningen. Er zijn verschillende soorten spaarrekeningen. In deze opgave bekijken we er drie: de groeirekening, de depositorekening en de renteklimrekening. We storten op elk van de drie spaarrekeningen een bedrag van € 10000 dat voor een periode van 10 jaar op de spaarrekening blijft staan.

Groeirekening De groeirekening is de bekendste soort. Het rentepercentage op deze rekening is 3,5% per jaar. Het is een 'rente op rente'-rekening: na een jaar wordt de rente bijgeschreven op de rekening, zodat het volgende jaar rente wordt berekend over een hoger bedrag G. Na elk jaar wordt het bedrag op de rekening dus hoger. Het bedrag G dat na t jaar op de groeirekening staat kun je berekenen met de formule: $G = 10000 \cdot 1{,}035^t$. Het bedrag op de groeirekening is na 10 jaar nog niet verdubbeld. Maar als je de rekening nog langer laat doorlopen, komt er een jaar dat het bedrag op de rekening voor het eerst twee keer zo hoog is. Het bedrag is zelfs nog hoger dan € 20000.

a Bereken na hoeveel jaar dat is.

Depositorekening De depositorekening is een spaarrekening met een rentepercentage van 4,0% per jaar. De rente over elk jaar is € 400. Dat bedrag wordt steeds bijgeschreven op een aparte betaalrekening. Op de betaalrekening krijg je geen rente, zodat het bedrag op de betaalrekening lineair tieneemt. De rente van 4,0% lijkt gunstiger dan een rente van 3,5%. Toch heb je na tien jaar bij de depositorekening in totaal minder rente gekregen dan bij de groeirekening. Een bank introduceert een nieuwe depositorekening die in tien jaar evenveel rente oplevert als de groeirekening.

b Bereken het rentepercentage per jaar van die nieuwe depositorekening. Geef je antwoord in één decimaal.

Renteklimrekening De renteklimrekening is een soort depositorekening. Ook hier wordt jaarlijks de rente bijgeschreven op een aparte betaalrekening die geen rente oplevert. Bij de renteklimrekening wordt het rentepercentage elk jaar hoger. In deze tabel kun je aflezen welke bedragen er na t jaar sparen op de renteklimrekening R en op de betaalrekening B staan.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
B	0	300	615	950	1310	1700	2130	2615	3165	3775	4475

Tabel 2

In de volgende tabel staan de rentepercentages voor het t-de jaar.

t-de jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rentepercentage	3,00	3,15	3,35	3,60	3,90	4,30				

Tabel 3

c Bereken het rentepercentage voor het zevende jaar. Geef je antwoord in twee decimalen.

d De renteklimrekening geeft in tien jaar € 4475 rente. Wat dit betreft is het de beste van de drie spaarrekeningen. De groeirekening is de op één na beste. Bereken het rentepercentage per jaar dat een groeirekening moet hebben om in 10 jaar € 4475 rente te geven. Geef je antwoord in twee decimalen.

(bron: examen wiskunde A havo 2004, tweede tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.